TOME 12. N° 8. OCTOBRE 1951.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ANTIFERROMAGNÉTISME ÉTUDE THERMOMAGNÉTIQUE DES PROTOXYDES DE COBALT ET DE NICKEL [1]

Par CHARLOTTE HENRY LA BLANCHETAIS.
Attachée de Recherches au C. N. R. S.

Sommaire. — L'étude thermomagnétique du protoxyde de cobalt dans des champs relativement faibles (2 200 à 7 800 Oe) a mis en évidence un point de transition T_λ à la température de l'anomalie de dilatation, soit 292° K, et une sensibilité au champ en sens inverse de celle que l'on observe chez les ferromagnétiques. Le protoxyde de cobalt, antiferromagnétique au-dessous de 292° K, ne suit une loi de Curie-Weiss que pour les températures supérieures à 460° K. Le moment magnétique que l'on peut alors déduire de la droite en $\frac{1}{\chi}$ et T est égal à $24,5\mu_W$ ou $4,96\mu_B$.

L'étude thermomagnétique du protoxyde de nickel met en évidence un maximum de la susceptibilité magnétique, assez étalé, à la température de 647° K (l'anomalie de dilatation se situe à 523° K). Comme les autres protoxydes des métaux de transition du groupe du fer, NiO est donc antiferromagnétique. La sensibilité au champ a lieu dans le sens habituel aux ferromagnétiques par suite, probablement, de la présence d'une impureté ferromagnétique. Pour cette même raison, l'état paramagnétique de NiO n'a pu être observé à haute température.

Néel [1], Bitter [2] et Van Vleck [3] ont étudié théoriquement le comportement de substances dans lesquelles les porteurs de moments magnétiques se disposeraient parallèlement et antiparallèlement à certaines directions communes ou « directions privilégiées ». Cette étude met en évidence une température T_λ (point de Curie ou point de transition) pour laquelle la susceptibilité magnétique de la substance passe par un maximum et pour laquelle existent également des anomalies de chaleur spécifique et de dilatation.

On peut également, comme le fait Bizette [15], donner une représentation du phénomène en admettant que, dans un corps antiferromagnétique, il existe une interaction entre les ions magnétogènes se traduisant par un couplage des électrons célibataires appartenant à deux atomes voisins, le moment magnétique de chaque couple formé devenant nul.

L'énergie d'agitation thermique augmente avec la température et devient égale, à la température T_λ, aux forces de couplage entre atomes, qui sont alors rompues.

Divers composés des métaux de transition de la famille du fer répondent aux définitions données ci-dessus. Il est à remarquer que, dans ces composés, les interactions entre atomes magnétogènes ne se font pas directement, mais par l'intermédiaire des anion non magnétiques qui les séparent (effet de second ordre ou de « superéchange ») [15].

Historique des études des anomalies de susceptibilité magnétique, de chaleur spécifique et de dilatation effectuées sur les protoxydes de métaux de transition de la famille du fer : MnO, FeO, CoO et NiO.

Millar, en 1928 [4], puis Russel et Millar en 1929 [5] montrent que les protoxydes de manganèse MnO et de fer FeO présentent une anomalie de chaleur spécifique aux températures respectives de 115,9 et 183,2° K.

En 1933, Tyler [6] étudie, aux basses températures, la susceptibilité magnétique de MnO. Il trouve d'abord un minimum de χ à $t = -188°$ C, puis un maximum à $t = -156°$ C.

En 1933, Klemm et Schüth [7], puis, en 1934, Klemm et Hass [8] effectuent l'étude magnétique de CoO et de NiO, mais leurs produits, préparés par calcination des carbonates de cobalt et de nickel en atmosphère de CO_2, contiennent des impuretés ferromagnétiques (nickel libre, en particulier) qui gênent les mesures de susceptibilité et

[1] Le résumé de cette étude a été présenté par M. F. Trombe, en juillet 1950, au Colloque international de Ferromagnétisme et d'Antiferromagnétisme de Grenoble.

ces auteurs ne peuvent mettre en évidence de phénomène d'antiferromagnétisme.

Bhatnagar et Bal, en 1934 [9], reprennent l'étude magnétique de NiO ainsi que, en 1937, Raychaudhury et Bose [10]. Ces derniers auteurs préparent leur produit en oxydant lentement l'amalgame de nickel à l'air. Ils observent une augmentation de la susceptibilité quand la température passe de 33 à 350° C puis, à cette température, une chute soudaine due à la présence de nickel métallique.

En 1937, Raychaudhury et Bose [11] étudient également les propriétés d'oxydes de cobalt de formules CoO, xO avec $x = 0{,}06$ et $x = 0{,}20$. Mais, l'étude magnétique ayant été effectuée au-dessus de la « température ambiante », c'est-à-dire 30° C environ, le point λ de l'oxyde de cobalt était déjà dépassé, comme nous le verrons par la suite, et ces auteurs observent simplement une décroissance de χ quand la température augmente, la courbe en $\frac{1}{\chi}$ et T étant pratiquement droite.

En 1938, H. Bizette, C. F. Squire et B. Tsaï [12] reprennent, aux basses températures, l'étude de Tyler sur la susceptibilité magnétique de Mn O, l'intervalle de température utilisé allant de 1° K à la température ambiante, soit 300° K environ. Bizette, Squire et Tsaï trouvent un maximum très aigu de la susceptibilité magnétique à la température de transition T_λ déjà signalée par Millar (115,9° K). De plus, ces auteurs observent que, au-dessous de T_λ, la susceptibilité augmente quand le champ magnétique utilisé augmente alors que, au-dessus de cette température, elle reste indépendante du champ et suit une loi de Curie-Weiss $\chi(T - \theta) = C$.

En 1941, Bhatnagar, Prakash et Quayyum [13] étudient les propriétés magnétiques et la structure de différents oxydes de cobalt préparés, soit par chauffage de CO_3Co dans le vide ou dans CO_2, soit par calcination de $Co(OH)_2$, soit encore par réduction de Co_2O_3 par NH_3 ou de Co_3O_4 par C. Ces auteurs observent une discontinuité de la courbe $\frac{1}{\chi}$ et T à 80-88°.

En 1943, Bizette et Tsaï [11] étudient le comportement magnétique de l'oxyde de fer FeO, pour lequel Russel et Millar avaient trouvé une anomalie de chaleur spécifique à la température de 185° K.

Bizette et Tsaï observent un maximum aigu de la susceptibilité magnétique à 198° K. Au-dessus de cette température, entre 213 et 293° K, la substance suit une loi de Curie-Weiss.

En 1946, Bizette [15] étudie la variation thermique de CoO dans un champ de 32 000 Oe. Il trouve un maximum de la suceptiblité magnétique, assez étalé, pour $T = 271°$ K.

Il mesure également la susceptibilité de NiO entre l'azote liquide et 400° K environ : la susceptibilité est fonction croissante de la température mais, à la température limite étudiée, le point λ n'est pas encore atteint.

Enfin, en 1948, Marc Foëx [16] entreprend l'étude dilatométrique des quatre protoxydes MnO, FeO, CoO, NiO en fonction de la température.

Il montre que ces composés présentent une anomalie de dilatation aux températures respectives de 116° K, 186° K, 292° K et 523° K. Les courbes obtenues ressemblent beaucoup à celles de Millar pour les chaleurs spécifiques et « l'analyse aux rayons X ne mettant pas en évidence de changement de la forme cristalline, il s'agit de transformation du deuxième ordre, appartenant au type λ » [16].

En résumé, les résultats obtenus en 1948 pouvaient être schématisés par le tableau suivant :

Tableau I.

Protoxyde.	Détermination du point λ (°K).		
	par chaleur spécifique	par dilatation	par susceptibilité magnétique
MnO	115,9 (Millar, 1928)	116 (M. Foëx, 1948)	115,9 (Bizette, Squire et Tsaï, 1938)
FeO	183,2 (Russel et Millar, 1929)	186 (M. Foëx, 1948)	198 (Bizette et Tsaï, 1943)
CoO	?	292 (M. Foëx, 1948)	271 (Bizette, 1946)
NiO	?	523 (M. Foëx, 1948)	?

D'après ce tableau, on voit que les trois séries de mesures donnent des résultats concordants dans le cas de MnO et de FeO; pour CoO, il existe une différence de 20° entre la température de l'anomalie de dilatation et celle du maximum de χ. Enfin, pour NiO, seule l'anomalie de dilatation avait pu être mise en évidence, par suite de la température relativement élevée à laquelle se situe le point λ et de la difficulté que l'on rencontre dans la préparation de l'oxyde de composition stœchiométrique.

Toutefois, la présence de cette anomalie, tout à fait analogue à celle observée pour les trois autres protoxydes MnO, FeO et CoO permettait déjà de penser que NiO présente également le phénomène d'antiferromagnétisme.

C'est afin de vérifier cette présomption et sur la

suggestion de M. Marc Foëx que j'ai entrepris, sur les produits qu'il avait préparés et analysés, l'étude thermomagnétique de NiO [17].

J'ai repris également celle de CoO, dans des champs plus faibles, dans l'ensemble, que celui utilisé par Bizette [15] afin de déterminer s'il existait effectivement, dans tous les cas, un décalage entre la température de l'anomalie de dilatation [16] et celle du maximum de χ.

Étude du protoxyde de cobalt.

Préparation. — Le protoxyde de cobalt a été formé à partir de nitrate de cobalt calciné à l'air à 1000° environ (²), puis traité sous vide, en tube de silice, à diverses températures. Quatre échantillons ont été ainsi préparés.

TABLEAU II.

Échantillon.	Température du traitement sous vide (°C).	Pourcentage en CoO.
1.........	1500	sensiblement 100 pour 100
2.........	1200	
3.........	900	
4.........	820	

De plus, un 5e échantillon a été fondu sous vide (vide de l'ordre de 1 mm de mercure) au four solaire.

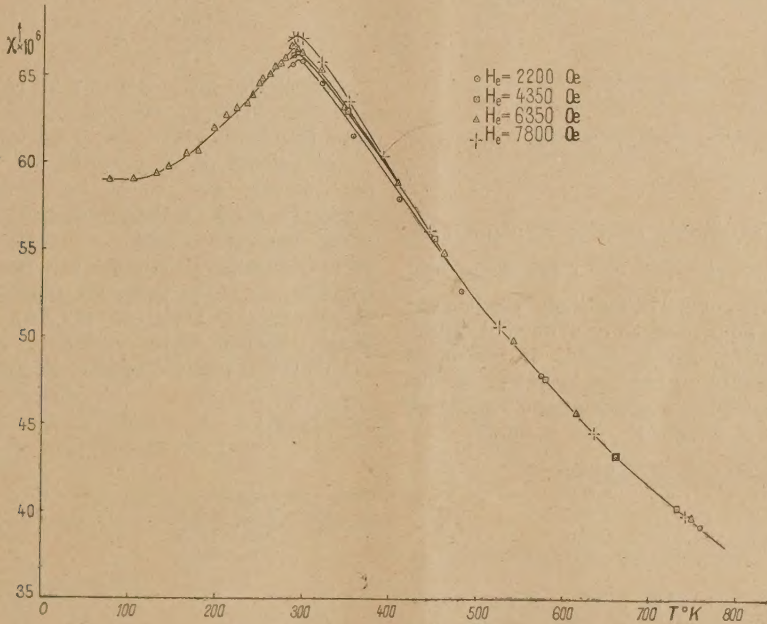


Fig. 1.

Choix de l'échantillon étudié. — Une étude thermomagnétique rapide, effectuée entre — 50° C et la température ordinaire, a montré que le produit n° 4, traité à 820° sous vide, donnait la variation la plus rapide de χ en fonction de la température. C'est cet échantillon, de couleur puce, qui a été utilisé par la suite.

Étude thermomagnétique (³). — 1° *Protoxyde calciné à 820° sous vide.* — L'échantillon a été étudié dans une ampoule scellée sous vide. Une étude préliminaire m'avait, en effet, montré que CoO préparé dans ces conditions se peroxyde très rapidement à l'air dès la température de 30° C environ.

J'ai effectué une variation thermique complète, depuis la température de l'air liquide jusqu'à 750° K, pour un champ de 6 350 Oe, puis des variations thermiques, entre la température ordinaire et 750° K environ, pour des champs de 2 200, 4 350 et 7 800 Oe, ceci afin de préciser la température à laquelle CoO devient paramagnétique.

Le résultat de ces mesures est reporté sur les courbes de la figure 1. On voit que la susceptibilité, presque constante à basse température, croît ensuite rapidement et régulièrement, passe par un maximum aigu et décroît enfin très rapidement quand la température continue à augmenter.

(²) On obtient ainsi un produit de composition intermédiaire entre Co_3O_4 et Co_2O_3.

(³) Les mesures magnétiques ont été faites à l'aide de la balance de Foëx et Forrer montée par M. F. Trombe pour l'étude des éléments des terres rares.

La température du maximum de χ, indépendante du champ, est égale à 293° K, donc en excellente concordance avec celle trouvée par M. Foëx pour l'anomalie dilatométrique (292° K) et plus élevée que celle signalée en 1946 par H. Bizette (4).

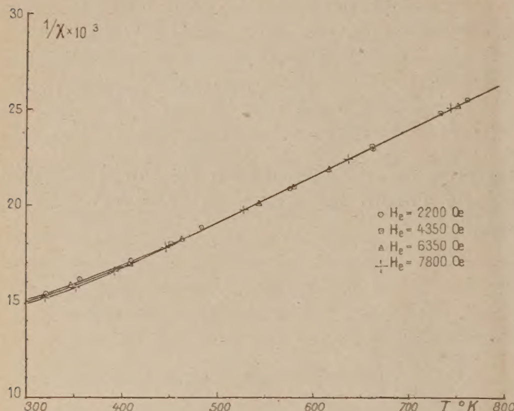


Fig. 2.

D'autre part, l'amplitude relative de l'anomalie, définie par le rapport $\frac{\chi_{max} - \chi_{80°K}}{\chi_{80°K}}$, est égale à 9 pour 100 environ pour l'échantillon étudié par H. Bizette et à 13,2 pour 100 pour celui que j'ai utilisé.

On voit également, sur la figure 1, que CoO présente une sensibilité au champ, la valeur la plus faible de la susceptibilité correspondant au champ le plus faible. On a, à 293° K, par exemple

$\chi.10^6$.	H (Oe).
66,1	2 200
66,5	4 350
66,8	6 350
67,2	7 800

Les différentes courbes ne se rejoignent pas immédiatement après le point λ et c'est seulement à partir de 460° K environ que la sensibilité au champ disparaît complètement.

Le tracé de $\frac{1}{\chi}$ en fonction de T, pour les différents champs, aux températures élevées (*fig.* 2) montre que CoO suit, à partir de 460° K, une loi de Curie-Weiss, avec les caractéristiques suivantes (5) :

$$c_M = 3,0546,$$
$$\sigma = 24,5 \; \mu_W = 4,96 \; \mu_B,$$
$$\theta = -280\,°K.$$

(4) Au Colloque international de Ferromagnétisme et d'Antiferromagnétisme, M. Bizette a d'ailleurs indiqué qu'il avait examiné à nouveau ses résultats expérimentaux et que, en raison de l'étalement de la courbe $\chi = f(T)$ que donne l'étude dans les champs forts au voisinage du maximum de χ, on pouvait adopter effectivement une valeur voisine de 292° K pour la définition du point λ.

(5) Compte non tenu de la correction introduite par la présence de l'atome d'oxygène.

La valeur du moment observé est tout à fait admissible pour un composé cobalteux.

2° *Protoxyde fondu sous vide au four solaire* (6). — Le nitrate de départ était un peu moins pur que celui qui m'avait servi précédemment et contenait, en particulier, des traces de nickel (moins de 10^{-3}). Lors du traitement sous vide à haute température, l'oxyde de nickel s'est trouvé dissocié.

La présence de cette impureté ferromagnétique, pourtant en très faible quantité, a suffi pour inverser le sens de la sensibilité au champ du produit. On trouve, par exemple, à 290° K

$\chi.10^6$.	H (Oe).
75,3	4 350
73,4	6 350
72,1	7 800

J'ai reporté sur la figure 3 les résultats de l'étude thermomagnétique effectuée à basse température pour les champs de 4 350, 6 350 et 7 800 Oe.

Les valeurs de la susceptibilité magnétique sont plus élevées que celles de l'échantillon calciné à 820° C, mais la température du point λ n'a pas varié de façon sensible (291° K environ) et, en première approximation, on peut dire que la courbe $\chi = f(T)$, pour un champ donné, a subi une translation verticale vers les χ élevés, par suite de la présence de nickel libre.

Une remarque intéressante est que cet échantillon

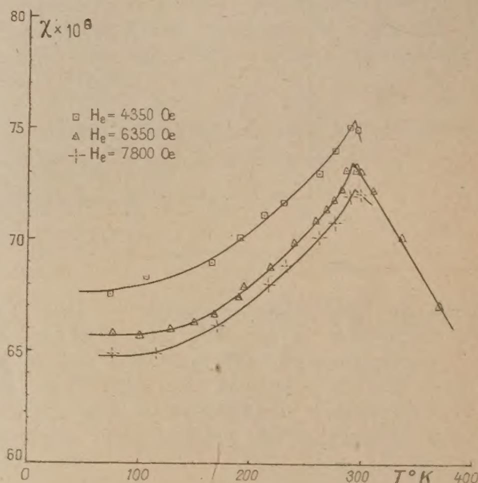


Fig. 3.

fondu a pu être étudié à l'air libre jusqu'à 370° K environ sans que sa composition varie, alors que l'oxyde préparé à 820° C se peroxydait dès 300° K.

(6) Traitement effectué en juin 1950 au Laboratoire de l'Energie Solaire de Mont-Louis.

Étude du protoxyde de nickel.

Préparation. — L'oxyde NiO a été préparé par calcination, à l'air, de nitrate de nickel très pur. Le produit de départ, contenant déjà moins de 5.10^{-5} de cobalt et moins de 10^{-4} de fer, fut encore purifié par cristallisation avant d'être calciné.

Une dizaine d'échantillons ont été préparés, en calcinant, pendant 1 h, le même produit de départ à des températures variant, de 100° en 100° environ, de 500 à 1400° C. Il est, en effet, assez difficile d'obtenir la composition stœchiométrique NiO : aux températures de calcination peu élevées, le produit contient de l'oxygène en excès cependant que, à haute température, l'oxyde est légèrement dissocié avec mise en liberté de nickel métallique (7).

L'analyse chimique a donné les résultats suivants (M. Foëx) :

Tableau III.

Échantillon.	Température de calcination du nitrate (°C) (durée : 1 h).	Pourcentage en NiO.	Observations.
1	505	98,35	Excès d'oxygène
2	600	99,33	
3	692	99,64	
4	790	99,86	
5	882	99,96	
6	980	∼100	L'analyse chimique donne des valeurs très voisines de 100 pour 100 en NiO et ne permet pas de doser le nickel libre formé
7	1100		
8	1200		
9	1400 (sous oxygène)		

Choix de l'échantillon étudié. Étude magnétique préliminaire. — Afin de compléter les résultats de l'analyse chimique, j'ai déterminé, à température ordinaire, la valeur de la susceptibilité magnétique, en fonction du champ, pour chacun des échantillons préparés. Les champs utilisés étaient les suivants : 2 200, 4 350, 6 350 et 7 800 Oe. De plus, dans quelques cas, j'ai effectué une étude thermomagnétique rapide, pour un champ donné, au voisinage de la température du point de Curie du nickel (360° C).

Les résultats de ces travaux préliminaires sont reportés dans le tableau IV et sur les courbes des figures 4 et 5.

Tableau IV.

Échantillon.	Température des mesures magnétiques (°C)	Susceptibilité magnétique $\chi.10^6$. $H = 2200$ Oe.	4350 Oe.	6350 Oe.	7800 Oe.
1	16,8	11,19	10,61	10,31	10,10
2	17,4	9,37	9,08	9,16	9,09
3	17,0	8,93	8,95	8,95	8,94
4	17,0	8,91	8,76	8,79	8,73
5	19,0	9,00	8,84	8,85	8,78
6	18,8	8,98	8,88	8,83	8,77
7	18,6	8,94	8,80	8,79	8,73
8	18,5	8,98	8,88	8,87	8,80
9	16,0	9,18	8,87	8,85	8,81

On voit, d'après la figure 4 que :

1° Les produits préparés au-dessous de 800° C et contenant un excès d'oxygène ont une suscep-

(7) L'échantillon préparé à 1400° a été calciné sous oxygène afin de réduire autant que possible cette dissociation.

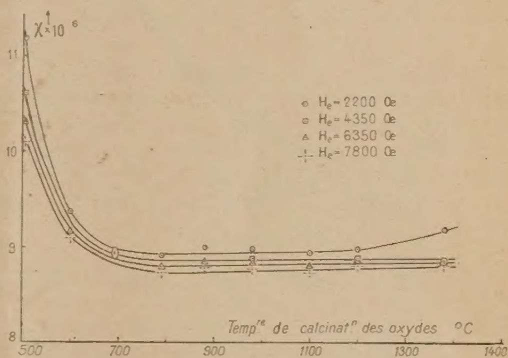


Fig. 4.

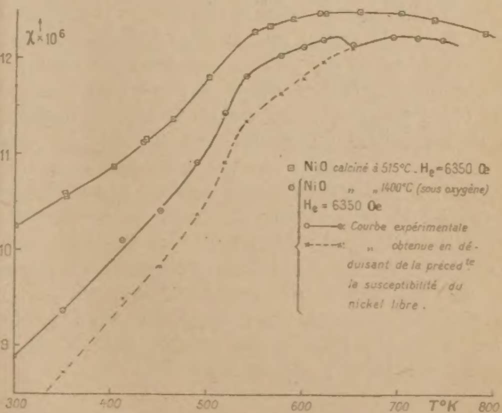


Fig. 5.

tibilité magnétique relativement élevée et présentent une sensibilité au champ (dans le sens habituel aux ferromagnétiques), et ceci d'autant plus que la température de calcination est plus basse et le produit plus peroxydé.

2° Pour des températures de calcination comprises entre 800 et 1200° C, les valeurs de la susceptibilité magnétique à la température ordinaire présentent un palier. On peut admettre que, dans cet intervalle de températures, on forme le produit NiO ([8]). L'échantillon étudié par la suite a été choisi dans la région médiane de ce palier, soit pour une température de calcination de 980° C.

Toutefois, dans cette région, la sensibilité au champ s'est fortement atténuée, mais n'a pas complètement disparu. Il est probable qu'une impureté ferromagnétique (peut-être Fe en traces très faibles, $< 10^{-4}$) n'a pu être éliminée. Les variations thermiques ne montrent pas de décrochement au voisinage du point de Curie du nickel.

3° Enfin, pour des températures de calcination supérieures à 1200° C, une sensibilité au champ notable réapparaît : une variation thermique effectuée entre 230 et 450° C sur l'échantillon calciné à 1400° sous oxygène (*fig.* 5) montre de façon nette la présence de nickel métallique. Le dosage magnétique effectué d'après la variation de χ du nickel, pour le champ utilisé, à son point de Curie [18], donne, pour Ni libre, des teneurs voisines de 10^{-4} qui ne sont pas décelables par l'analyse chimique.

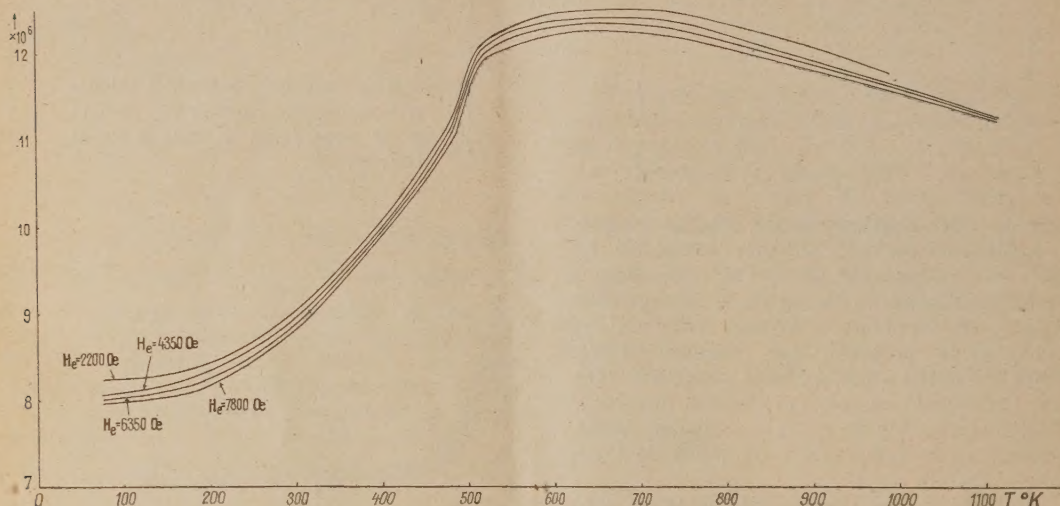


Fig. 6.

Dans le cas du produit calciné à basse température, au contraire, la phase ferromagnétique n'est pas constituée par du nickel libre ou, s'il en existe, c'est à l'état de traces encore plus faibles que dans le cas précédent et qui ne peuvent donc pas expliquer la forte augmentation de la susceptibilité magnétique observée. On voit, de plus, sur la figure 4, que la sensibilité au champ est notable (χ passe de $11,19.10^{-6}$ pour 2 200 Oe à $10,10.10^{-6}$ pour 7 800 Oe). Il serait intéressant de voir, par une étude aux rayons X, si l'oxygène en excès par rapport à la composition NiO est simplement fixé dans le réseau de ce dernier ou s'il y a, à basse température, formation de peroxydes de composition définie. On pourrait évidemment, par analogie avec le fer, penser à Ni_3O_4, mais il ne semble pas qu'un tel composé ait jamais été mis en évidence.

([8]) Les produits préparés dans cette zone de températures ont une teinte franche vert foncé.

Étude thermomagnétique. — Une étude de la susceptibilité magnétique en fonction de la température a été effectuée sur l'échantillon n° 6 (calciné à 980° C) pour quatre valeurs du champ magnétique extérieur (2 200, 4 350, 6 350 et 7800 Oe). L'intervalle de température étudié allait de 80 à 1110° K. J'ai contrôlé, par des mesures de masse et de susceptibilité après retour à la température ordinaire, que la composition du produit ne variait pas de façon appréciable au cours de ces traitements.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 6.

On voit que la susceptibilité croît d'abord très lentement avec la température, puis de plus en plus rapidement. Les courbes $\chi = f(T)$ passent par un point d'inflexion à tangente sensiblement verticale, atteignent un maximum assez étalé et, enfin, décroissent à partir de 647° K environ.

La température du maximum de χ paraît indé-

pendante du champ utilisé. Au contraire le point d'inflexion des courbes $\chi = f(T)$ se déplace légèrement avec le champ; il se situe à 492° K pour 2 200 Oe, 497° K pour 4 350 Oe, 502° K pour 6 350 Oe et 506° K pour 7 800 Oe. Il ne semble malheureusement pas possible de tirer de conclusions de cette variation, en raison de la présence de l'impureté ferromagnétique déjà signalée, dont l'effet vient se superposer à celui de NiO. On remarque, en particulier, que la sensibilité au champ a lieu dans le sens habituel aux ferromagnétiques (χ d'autant plus élevé que le champ est plus faible) et que cette sensibilité n'a pas encore disparu 450 degrés après le maximum de χ, alors que NiO doit vraisemblablement se conduire comme un paramagnétique.

Or, on a vu, d'après l'étude de l'oxyde de cobalt fondu au four solaire, qu'il suffit de traces ferromagnétiques pour inverser le sens de la variation de χ en fonction du champ.

Quoi qu'il en soit, le protoxyde de nickel NiO présente les caractéristiques d'un corps antiferromagnétique, mais la température du maximum de χ (647° K) est assez fortement décalée par rapport à celle de l'anomalie de dilatation (523° K) (⁹). Il semble que ce soit plutôt pour la température d'inflexion dans les champs élevés qu'ait lieu la coïncidence.

(⁹) L'étude dilatométrique publiée par M. Foëx se rapportait à l'oxyde calciné à 1100° C, mais cet auteur a également examiné d'autres échantillons, calcinés à des températures très différentes, qui l'ont conduit à des résultats analogues pour la température de l'anomalie de dilatation.

Conclusions.

En résumé, l'étude magnétique du *protoxyde de cobalt* fait apparaître un point λ à la même température que celui que l'on détermine dilatométriquement. Le maximum de χ trouvé est plus accentué et mieux défini que celui qui avait été mis en évidence dans des travaux antérieurs; l'amplitude relative de l'anomalie est également plus grande.

De plus, la sensibilité au champ de l'oxyde de cobalt au point λ est inverse de celle que l'on observe dans le domaine ferromagnétique. Cette caractéristique paraît bien devoir être attribuée aux corps antiferromagnétiques, mais elle n'est évidemment observable qu'en l'absence de tout ferromagnétisme superposé.

En prolongeant vers les hautes températures l'étude de la susceptibilité, j'ai pu déterminer le moment magnétique de Co, $\sigma = 24{,}5\,\mu_W = 4{,}96\,\mu_B$, valeur acceptable pour un composé cobalteux.

L'étude du *protoxyde de nickel* conduit à une conclusion très nette en ce qui concerne l'existence d'un maximum de χ caractérisant l'état antiferromagnétique. Ce maximum est très étalé et l'anomalie de dilatation coïncide, non avec lui, mais avec le point d'inflexion de la courbe $\chi = f(T)$ dans les champs élevés.

La sensibilité au champ observée montre que le produit contenait un corps ferromagnétique (traces de fer, probablement). C'est pour cette raison que je n'ai pu déterminer, à haute température, le moment de l'ion Ni dans NiO, bien que mes mesures aient été prolongées jusqu'à 1110° K.

Manuscrit reçu le 20 mars 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] NÉEL. — *Ann. de Physique*, 1932, **17**, 5; *J. Phys. Rad.*, 1932, **3**, 160; *Ann. de Physique*, 1936, **5**, 232; *C. R. Acad. Sc.*, 1936, **203**, 304; *Ann. de Physique*, 1948, **3**, 137.

[2] BITTER. — *Phys. Rev.*, 1938, **54**, 79.

[3] VAN VLECK. — *J. Chem. Phys.*, 1941, **9**, 85.

[4] MILLAR. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 1928, **50**, 1875.

[5] RUSSEL et MILLAR. — *J. Amer. Chem. Soc.*, 1929, **51**, 215.

[6] TYLER. — *Phys. Rev.*, 1933, **44**, 776.

[7] KLEMM et SCHÜTH. — *Z. anorg. Chem.*, 1933, **210**, 33.

[8] KLEMM et HASS. — *Z. anorg. Chem.*, 1934, **218**, 82.

[9] BHATNAGAR et BAL. — *J. Indian Chem. Soc.*, 1934, **11**, 603.

[10] RAYCHAUDHURY et BOSE. — *Science and Culture*, 1937, **3**, 118.

[11] BOSE et RAYCHAUDHURY. — *Science and Culture*, 1937, **3**, 246.

[12] BIZETTE, SQUIRE et TSAÏ. — *C. R. Acad. Sc.*, 1938, **207**, 449.

[13] BHATNAGAR, PRAKASH et QUAYYUM. — *J. Indian Chem. Soc.*, 1941, **18**, 540.

[14] BIZETTE et TSAÏ. — *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **217**, 390.

[15] BIZETTE. — *Ann. Physique*, 1946, **1**, 299.

[16] FOËX M. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, 193.

[17] FOËX M. et HENRY LA BLANCHETAIS C. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1579.

[18] FALLOT. — *J. Phys. Rad.*, 1944, **5**, 153.

INTERFÉRENCES LUMINEUSES ET CORPUSCULES

Par M. RISCO.
Maître de Recherches au C. N. R. S.

Sommaire. — Interprétation corpusculaire d'une expérience de diffraction, imaginée par Abbe, dans laquelle un réseau est illuminé simultanément par deux faisceaux d'égale intensité et où l'on amène à la coïncidence deux des maxima transmis. L' « indice de l'espace pour les ondes associées » joue dans ce cas pratique un rôle essentiel.

La théorie développée garde une connexion étroite avec les interférences entre ondes planes d'une même amplitude. L'étude corpusculaire de ce type de phénomènes conduit à des résultats assez satisfaisants. Nous l'abordons ici par les méthodes propres à la Cinématique relativiste, et étendons cette étude au cas des pulsations lumineuses dues à l'interférence entre ondes de fréquences différentes se propageant en des sens contraires.

1. Rappelons d'abord une ancienne expérience d'optique réalisée par Winkelmann suivant les indications d'Abbe. Nous verrons qu'en utilisant des connaissances plus récentes on peut lui attribuer actuellement une signification théorique plus concrète que celle qui était possible à l'époque.

Considérons deux systèmes d'ondes planes et

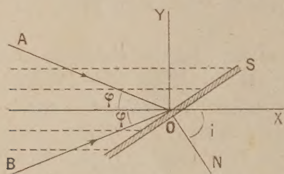


Fig. 1.

cohérentes d'égale amplitude A, d'une même fréquence ν et qui s'entrecroisent dans le vide sous un angle 2φ. Nous prendrons comme plan de la figure 1 celui qui est défini par les directions de propagation AO et BO des deux systèmes d'ondes et nous emploierons comme axes de coordonnées les bissectrices de ces droites.

On obtient donc dans l'espace, par addition des variables lumineuses, un état interférentiel qui répond à la formule

$$\left.\begin{aligned} s &= A\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x\cos\varphi-y\sin\varphi}{c}\right)\\ &\quad+A\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x\cos\varphi+y\sin\varphi}{c}\right)\\ &=2A\cos 2\pi\nu\frac{y\sin\varphi}{c}\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{u}\right)\\ &=2A\cos 2\pi\frac{y\sin\varphi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\Lambda}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où

$$u=\frac{c}{\cos\varphi}, \tag{2}$$

$$\Lambda=\frac{\lambda}{\cos\varphi}, \tag{3}$$

et qui est caractérisé par une distribution d'intensités selon des plans de maxima et minima, perpendiculaires au plan du dessin et parallèles à la bissectrice OX des vecteurs de propagation. Deux plans interférentiels d'une même nature (représentés en pointillé sur la figure 1) sont séparés par une période spatiale $\frac{\lambda}{2\sin\varphi}$ et, en conséquence, les franges rectilignes que l'on recueille sur un écran S, dont la normale N forme un angle i avec OX, ont pour équidistance

$$d=\frac{\lambda}{2\sin\varphi\cos i}. \tag{4}$$

Dans l'expérience qui nous occupe (*fig.* 2), on a employé comme écran la surface plane d'un réseau par transmission, avec ses fentes orientées selon OZ. En faisant tourner le réseau autour de cet axe, si l'on maintient invariable l'angle 2φ des faisceaux

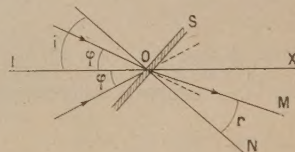


Fig. 2.

illuminants, on arrive à produire la coïncidence des deux maxima principaux de 1er ordre, situés à droite et à gauche des directions lumineuses primitives, quand l'angle i qui définit les incidences a la valeur qui exprime la formule

$$\cos i=\frac{\lambda}{\varepsilon\sin\varphi}, \tag{5}$$

où ε désigne la distance entre deux fentes consécutives du réseau.

Des équations (4) et (5) on tire

$$d=\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

c'est-à-dire que, dans les conditions de travail

imposées, l'intervalle des franges produites sur la surface du réseau est égale à la moitié de sa constante. On peut le constater, comme Winkelmann, au moyen d'une observation microscopique.

Quant à la direction des maxima superposés de 1er ordre, l'angle r qui forme avec la normale au réseau est calculable, en fonction de i, par la relation facile à démontrer

$$\sin r = \sin i \cos \varphi. \tag{7}$$

L'attention d'Abbe avait été attirée par ce fait que le quotient des sinus $\frac{\sin i}{\sin r}$ peut s'écrire, pour les directions en question, comme un rapport entre deux longueurs d'onde attribuables à l'une et l'autre des régions où l'espace est divisé par le plan du réseau. En effet, selon les équations (7) et (3)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\Lambda}{\lambda}. \tag{8}$$

Λ, qui a été appelée « longueur d'onde fictive », joue un rôle fondamental, défini par la formule (1), dans le phénomène interférentiel qui a son siège dans la région spaciale antérieure au réseau et qui est caractérisé, dans le plan du dessin, par des franges orientées selon la bissectrice.

λ, longueur d'onde de la lumière employée, se retrouve dans les rayons diffractés et particulièrement dans la direction OM des maxima en coïncidence.

En somme, la relation (8) montre que la direction de la bissectrice des faisceaux illuminants et la direction des maxima superposés de 1er ordre sont liées l'une à l'autre comme s'il s'agissait d'une réfraction, étant pris le plan du réseau pour surface de séparation de deux milieux de différent indice.

En étudiant cette analogie trouvée par Abbe et spécialement, du double point de vue ondulatoire et corpusculaire, la propagation qui s'effectue le long de la bissectrice des faisceaux incidents, on arrive à des nouveaux résultats se référant principalement à la possibilité d'envisager la production de paires corpusculaires dans les champs d'interférence entre ondes lumineuses d'une même amplitude.

2. L'équation (2) montre que $u \geq c$. Il faut donc considérer cette vitesse u comme une vitesse de phase, et l'on peut affirmer en conséquence que la « longueur d'onde fictive » Λ, équation (3), n'est autre qu'une longueur d'onde associée. L'état interférentiel (1) implique réellement la formation d'un essaim de corpuscules qui se déplacent selon la direction IOX avec une vitesse

$$v = \frac{c^2}{u} = c \cos \varphi \tag{9}$$

et dont la masse individuelle au repos, calculable par la relation de M. L. de Broglie

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{10}$$

a pour valeur

$$m_0 = \frac{h\nu}{c^2} \sin \varphi. \tag{11}$$

En conséquence, la masse maupertuisienne d'un de ces corpuscules est, pour l'expérimentateur, exactement égale à la masse d'un photon illuminant

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

A chaque rayon corpusculaire incident parallèle à IOX, on doit faire correspondre, après la diffraction, un rayon lumineux ayant la direction OM des maxima de 1er ordre.

Sans qu'il faille dépasser l'aspect plutôt formel attribué par les auteurs mêmes à leur expérience, il convient de signaler que si l'on établit pour le rayon incident et le rayon transmis l'égalité relativiste des projections des quantités de mouvement sur le plan du réseau

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sin i = \frac{h\nu}{c} \sin r,$$

on retrouve, équation (8),

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{\cos \varphi}, \tag{12}$$

soit, selon (9)

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{v} = \frac{1}{\beta}. \tag{12 bis}$$

On arrive en somme, *pour l'angle d'incidence utilisé*, à un résultat qui concorde avec celui de la théorie newtonienne de la réfraction : les sinus de i et de r sont, en effet, en rapport inverse des vitesses corpusculaires (v et c) existantes devant et derrière la surface de séparation. Mais, évidemment, en renonçant à l'emploi de vitesses matérielles, le quotient des sinus peut s'écrire aussi comme un rapport direct entre les vitesses de phase.

Soulignons maintenant le résultat suivant : la région de l'espace qui précède le réseau de diffraction (région qui est le siège des formations corpusculaires dues aux chocs des photons illuminants) a par rapport au vide, c'est-à-dire par rapport à l'autre région spatiale, un « indice » qui vaut, selon les égalités (12) et (12 *bis*)

$$n_{12} = \cos \varphi = \frac{v}{c} = \beta. \tag{13}$$

On parvient donc à l'expression bien connue de l' « indice de l'espace pour les ondes associées à un mobile de vitesse βc ».

Nous avons parfois laissé un peu de côté cette circonstance que les rayons diffractés de direction OM sont des rayons doubles, formés par la superposition des maxima de 1er ordre. On devrait s'attendre, en conséquence, à trouver deux cor-

puscules en mouvement, et non un seulement, pour chaque trajectoire IO d'incidence. Cette question sera dûment éclaircie par la suite (§ 4).

3. L'exposé fait dans les paragraphes précédents confirme la possibilité de concevoir la formation de certains corpuscules en chaque point d'un champ d'interférences entre ondes lumineuses d'une même amplitude, et cette idée, comme nous le verrons, peut être étendue aux franges mobiles produites par deux ondes planes de fréquences inégales. Il nous semble que la question mérite d'être étudiée de plus près, même en devant laisser à part le cas d'interférences entre ondes d'amplitudes différentes, qui offre des difficultés sérieuses (¹).

Limitons-nous, pour le moment, au cas jusqu'ici considéré où les deux ondes lumineuses planes ont une même fréquence. Nous continuerons de représenter ces ondes, en utilisant le système d'axes

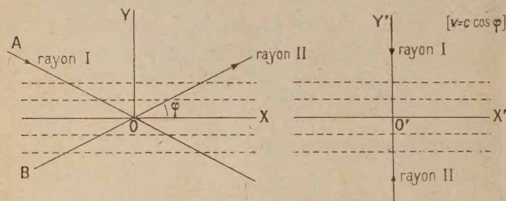


Fig. 3 *a* et 3 *b*.

coordonnés de la figure 3 *a*, au moyen des expressions

$$s_1 = A \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\varphi - y\sin\varphi}{c}\right), \qquad (15)$$

$$s_2 = A \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c}\right). \qquad (16)$$

L'addition de ces variables lumineuses produit évidemment dans l'espace une distribution périodique d'intensités tout à fait pareille (laissant à part le changement de phase par réflexion) à celle que l'on obtient en faisant interférer un faisceau incident avec le faisceau réfléchi sous incidence oblique par un miroir plan, parfaitement réflecteur, qui serait en coïncidence avec XOZ.

Les franges, telles qu'elles existent dans le système XY, sont des franges ordinaires d'interférence, mais si l'on soumet le phénomène à une transformation de Lorentz, on peut trouver, comme nous allons voir, un certain référentiel dans lequel l'état interférentiel devient stationnaire.

Considérons deux systèmes coordonnés XY, X′ Y′ en mouvement relatif, qui soient également orientés et dont les axes d'abscisses glissent l'un sur l'autre avec une vitesse v. Dans ces conditions les formules de Lorentz peuvent s'écrire sous la forme

$$x = ax' + bct',$$
$$y = y',$$
$$t = at' + \frac{b}{c}x',$$

a et b étant

$$a = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \qquad b = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Il est évident, par raison de symétrie, qu'en vertu de cette transformation relativiste les ondes (15) et (16) se présenteront dans le référentiel X′ Y′ comme ondes ayant une nouvelle, mais commune fréquence ν'. Les amplitudes A′ seront aussi égales pour les deux systèmes d'ondes et leurs vecteurs de propagation continueront d'être disposés symétriquement par rapport à l'axe des abscisses. Les plans interférentiels glissent sur eux-mêmes par effet du changement de référentiel, et l'on ne peut les différencier théoriquement que par leurs propriétés ondulatoires lorsqu'on passe de XY à X′Y′.

Désignons maintenant par α'_1, β'_1 et α'_2, β'_2 les cosinus directeurs des rayons dans le référentiel X′Y′. Les nouvelles variables lumineuses s'écrivent alors

$$s'_1 = A' \cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{\alpha'_1 x' + \beta'_1 y'}{c}\right),$$

$$s'_2 = A' \cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{\alpha'_2 x' + \beta'_2 y'}{c}\right)$$

et l'on obtient

$$\nu' = (a - b\cos\varphi)\nu = \frac{c - v\cos\varphi}{\sqrt{c^2 - v^2}}\nu, \qquad (17)$$

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \frac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi} = \frac{c\cos\varphi - v}{c - v\cos\varphi}, \qquad (18)$$

$$\beta'_1 = -\beta'_2 = -\frac{\sin\varphi}{a - b\cos\varphi} = -\sqrt{c^2 - v^2}\,\frac{\sin\varphi}{c - v\cos\varphi}. \qquad (19)$$

De ces deux dernières formules il ressort que la valeur particulière de la vitesse

$$v = c\cos\varphi \qquad (20)$$

sert à définir un référentiel dans lequel les deux faisceaux de rayons parallèles ont une même direction (celle de l'axe O′Y′) et se propagent en des sens inverses (*fig.* 3 *b*). Comme d'autre part les fréquences et les amplitudes sont toujours communes pour les deux faisceaux, il est évident que le référentiel trouvé jouit du privilège de présenter le phénomène interférentiel avec les propriétés ondulatoires d'un état stationnaire caractérisé, selon (17) et (20), par la fréquence propre,

$$\nu' = \nu\sin\varphi = \nu_0. \qquad (21)$$

A cet ensemble de plans interférentiels stationnaires nous pouvons associer des corpuscules qui soient au repos en X′ Y′ et qui auront individuellement une masse propre m_0 calculable par la formule

$$h\nu_0 = m_0 c^2$$

(¹) DE BROGLIE L. — *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire*, 1930, chap. X.

t qui vaut pourtant

$$m_0 = \frac{h\nu}{c^2} \sin \varphi. \qquad (22)$$

On arrive, en somme, pour m_0 et v aux valeurs (11) t (9) précédemment trouvées.

Dans le cas concret où l'on emploie pour produire es franges un faisceau parallèle, et son faisceau éfléchi par un miroir plan, réflecteur intégral, que ious supposerons placé normalement à OY, l'obser-rateur qui appartient au référentiel XY, opérant ous incidence oblique (*fig.* 3 *a*), obtiendra un état nterférentiel de type ordinaire, tandis que l'obser-rateur situé en X' Y' interprète cette expérience omme une expérience de Wiener; c'est-à-dire qu'en ertu de la transformation relativiste, l'angle d'inci-lence s'annule pour ce deuxième observateur *fig.* 3 *b*) et l'état interférentiel devient pour lui tationnaire.

4. Laissant pour le moment à l'écart la méthode ndulatoire que nous avons suivie jusqu'ici, essayons l'obtenir les mêmes résultats par application des ois du choc élastique à deux photons $h\nu$ corres-ondant aux ondes qui interfèrent et qui sont nclinées, l'une sur l'autre, d'un angle que nous ontinuerons d'appeler 2φ.

Soit μ_0 la masse propre provenant du choc et v la itesse corpusculaire, dirigée évidemment selon la issectrice des rayons (*fig.* 4). Les principes de

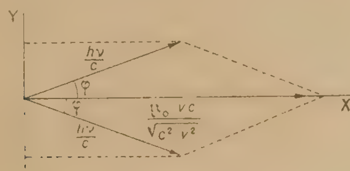


Fig. 4.

onservation de l'énergie et de la quantité de mouve-nent nous permettent alors d'écrire le système l'équations

$$2h\nu = \frac{\mu_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$\frac{2h\nu}{c} \cos \varphi = \frac{\mu_0 v c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ui a pour solution

$$v = c \cos \varphi,$$

$$\mu_0 = 2 \frac{h\nu}{c^2} \sin \varphi.$$

Nous trouvons donc la même vitesse corpuscu-aire qu'auparavant, mais on arrive pour la masse ropre à une valeur qui est précisément le double e celle antérieurement obtenue, (22) et (11).

Pour tourner cette difficulté, il suffit d'admettre u'en un point quelconque du champ d'interférences, choc de deux photons donne naissance à deux corpuscules qui ont une masse égale et qui se déplacent avec une commune vitesse, parallèlement aux franges existantes dans le plan XY. L'onde de phase, équation (1), irait associée à l'essaim des corpuscules qui, formant des « nappes » probabilistes coulent à travers le champ.

5. Quoique nous ayons raisonné jusqu'ici pour des faisceaux parallèles, les résultats que nous venons de résumer peuvent être facilement adaptés au cas où les sources synchrones se trouvent à

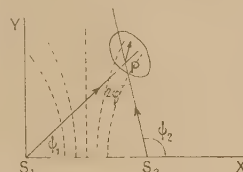


Fig. 5.

une distance finie. Nous supposerons que l'une des sources S_1 est située à l'origine de coordonnées d'un système XY (*fig.* 5), et que l'autre S_2 est placée sur l'axe des X, en un point d'abscisse l.

Prenons dans la région d'interférences un point P que nous allons entourer d'une surface fermée de dimensions très petites par rapport aux distances S_1P et S_2P, appelées par la suite r_1 et r_2. Nous admettrons que l est aussi petite comparée à ces distances.

Dans le volume élémentaire considéré, les ondes provenant des deux sources se présentent comme deux séries de plans ayant pour inclinaison relative le même angle 2φ des rayons qui parviennent à P. Les formules (20) et (22) pourront en somme être appliquées au petit domaine où ce point est enfermé.

Soulignons ici que dans la théorie classique des phénomènes produits par les fentes de Young et les dispositifs analogues, le problème de la propagation dans le champ d'interférence se trouve tout à fait écarté. En effet, pour une telle étude il ne suffit pas de considérer les deux rayons

$$s_1 = A \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{r_1}{c}\right), \qquad s_2 = A \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{r_2}{c}\right) \qquad (23)$$

qui interfèrent en P, car la propagation dépend de la coexistence en chaque volume élémentaire des deux séries d'ondes déjà mentionnées.

Écrivons les équations des plans d'onde sous la forme

$$r_1 = x \cos \psi_1 + y \sin \psi_1,$$

$$r_2 = x \cos \psi_2 + y \sin \psi_2 - l \cos \psi_2,$$

où ψ_1 et ψ_2 désignent respectivement les angles d'inclinaison des rayons lumineux S_1P et S_2P par rapport à l'axe des abscisses. En portant ces valeurs de r_1 et r_2 dans les expressions (23), on voit aisément

que dans la somme $s = s_1 + s_2$ figure comme facteur

$$\cos 2\pi\nu \left\{ t - \frac{\left(x \cos \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) + y \sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) - \frac{l}{2} \frac{\cos\psi_2}{\cos\varphi} \right)}{\frac{c}{\cos\varphi}} \right\}, \quad (24)$$

où $\varphi = \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$ est le demi-angle formé par les deux rayons lumineux. Bref, nous sommes en présence d'une propagation qui s'effectue localement suivant la bissectrice des rayons avec la vitesse de phase $\frac{c}{\cos\varphi}$. Celle-ci correspond effectivement à la vitesse corpusculaire (20), dirigée en P selon la tangente à l'hyperbole qui a pour foyers S_1 et S_2.

On retrouve sans difficulté les résultats restants. En particulier, la masse propre (22) des corpuscules qui composent la paire peut être déduite par application de la formule de M. Louis de Broglie, comme nous l'avons fait dans le paragraphe 2.

Il convient de remarquer que les conclusions antérieures semblent être en connexion avec une idée que R. W. Wood à soutenue instamment [2], l'illustrant par des expériences faites au moyen de rides provoquées par deux diapasons sur la surface libre d'une cuve de mercure [3]. D'après Wood la propagation de l'énergie dans un sytème de franges d'interférence obéit à un mécanisme assez compliqué, et il se produit un flux prédominant qui parcourt les hyperboles, ou plutôt l'espace limité par chaque deux hyperboloïdes de minima.

6. Nous pouvons faire, en synthèse, les affirmations suivantes :

a. Deux ondes lumineuses planes et d'amplitudes égales, lorsqu'elles interfèrent sous un angle d'inclinaison différent de zéro, donnent naissance à une onde associée;

b. Le choc de deux photons prenant part au phénomène des interférences produirait une paire de corpuscules associées à l'onde résultante.

Ces conclusions ont été obtenues en partant de deux ondes lumineuses de la même fréquence. Nous n'avions donc en vue que les phénomènes d'observation courante, c'est-à-dire des phénomènes caractérisés par des franges au repos.

Nonobstant, tel que nous venons de les exprimer, ce sont des résultats parfaitement utilisables pour les cas où les ondes interférentes, n'ayant pas la même fréquence, donnent lieu à des franges mobiles par rapport à l'observateur.

7. Comme exemple le plus simple, considérons deux ondes planes, de fréquences ν_1 et ν_2, qui se propagent le long de l'axe des X, mais en des sens contraires. Supposons que $\nu_1 > \nu_2$.

En ajoutant leurs variables lumineuses, l'on obtient

$$s = s_1 + s_2 = A \cos 2\pi\nu_1 \left(t - \frac{x}{c}\right) + A \cos 2\pi\nu_2 \left(t + \frac{x}{c}\right)$$
$$= 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\left(t - \frac{x}{v}\right) \cos 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\left(t - \frac{x}{u}\right), \quad (25)$$

où

$$v = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} c, \qquad u = \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} c \qquad (26)$$

sont liées par la formule

$$vu = c^2$$

et désignent respectivement les vitesses de l'amplitude et de la phase pour l'onde résultante.

La vitesse corpusculaire $v < c$ peut être considérée comme étant celle de l'ensemble des franges stationnaires qui voyagent avec les corpuscules. Il serait facile de constater que la période spatiale de ces franges, perpendiculaires à l'axe des abscisses, se présente à l'observateur XY comme une longueur ayant éprouvé la contraction de Lorentz.

D'autre part, selon l'expression (25), la longueur d'onde associée est

$$\lambda_a = \frac{2u}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{2c}{\nu_1 - \nu_2}.$$

On obtient finalement pour la masse propre du corpuscule, calculée en fonction de v et λ_a, la valeur suivante [4] :

$$m_0 = \frac{h\sqrt{\nu_1 \nu_2}}{c^2}.$$

8. Appliquons enfin les lois du choc élastique aux deux photons $h\nu_1$, $h\nu_2$ qui parcourent une même droite en des sens opposés.

Le système d'équations

$$h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{\mu_0 c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$
$$\frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c} = \frac{\mu_0 v c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

conduit pour la vitesse v à un résultat satisfaisant [formules (26)] mais l'on arrive, comme auparavant, à une valeur double pour la masse au repos : $\mu_0 = 2m_0$. Ce qui, une fois de plus, semble indiquer la formation de deux corpuscules lors du choc de deux photons dans le champ d'interférences considéré.

(2) Wood R. W. — On the Flow of Energy in a System of Interference Fringes (*Phil. Mag.*, 1909, **18**, 250) et *Physical Optics*, 3e éd., 1934, p. 170.

(3) *Voir* spécialement Vincent J. H. — On the Photography of Ripples, 1e mémoire (*Phil. Mag.*, 1897, **43**, 411-417 et *Proc. Phys. Soc.*, juillet 1897); On the Photography of Ripples, 3e mémoire (*Phil. Mag.*, 1898, **46**, 290-296).

(4) La masse au repos de chaque corpuscule est donc égale, dans ce cas, à la moyenne géométrique des masses des photons interférents. Quant à la masse maupertuisienne, elle est égale à la moyenne arithmétique des masses des deux photons.

Manuscrit reçu le 27 janvier 1951.

UNE THÉORIE DES FLUCTUATIONS ÉLECTRIQUES DANS LES SEMI-CONDUCTEURS

Par M. SURDIN.

Commissariat à l'Énergie Atomique. Laboratoire du Fort de Châtillon, Fontenay-aux-Roses (Seine).

Sommaire. — Quand on fait passer un courant constant à travers un filament semi-conducteur, ou un cristal détecteur, comportant un contact métal-semi-conducteur, on observe à leurs bornes des fluctuations électriques dont l'intensité est de plusieurs puissances de 10 supérieure à celle que donnerait l'effet thermique ou l'effet de grenaille.

Après avoir rappelé brièvement les résultats expérimentaux essentiels relatifs à ce « bruit supplémentaire », l'auteur propose une théorie du phénomène basée sur la fluctuation du nombre des électrons de conduction dans le cas du filament, et du nombre des « centres donneurs » de la barrière de potentiel dans le cas du contact métal-semi-conducteur.

1. **Introduction.** — L'emploi généralisé des ristaux détecteurs dans la technique des ondes entimétriques et les progrès récents accomplis lans l'étude et la construction des transistors ont nouveau attiré l'attention sur les semi-conduceurs (s. c.); en effet, plusieurs théories des flucuations électriques dans les s. c. et les cristaux létecteurs ont été avancées récemment [1], [2], [3].

Ces théories, ainsi que celle exposée dans le présent némoire, ont pour but d'expliquer les fluctuations supplémentaires » observées expérimentalement t qui ne peuvent pas être attribuées aux effets hermiques et de grenaille (shot effect).

L'intérêt de cette théorie nous semble résider dans e fait qu'elle attribue ce « bruit supplémentaire » lans les semi-conducteurs aux fluctuations du ombre des électrons de conduction et le « bruit upplémentaire » dans les cristaux détecteurs, à a fois, aux fluctuations du nombre des « centres lonneurs » de la barrière de potentiel et aux flucuations du nombre des électrons de conduction ans le s. c. La théorie s'apparente ainsi à la théorie es fluctuations de résistance [4] et à celle du flicker effect » [5].

Dans ce qui suit, après un bref rappel des résultats xpérimentaux, on étudie d'abord les fluctuations le résistance qui intéressent tout le volume du s. c., nsuite, on expose une théorie des fluctuations de a couche limite et, en particulier, de celle du contact nétal-s. c.

2. **Résumé des résultats expérimentaux** [6], 7]. — Soit y une grandeur physique fluctuante.)n appelle « composante spectrale d'intensité de y » la fréquence ν, le carré moyen de la fluctuation apporté à une bande passante unité. Nous la lésignerons dans ce qui suit par C. S. I. ou par $\overline{y_\nu^2}$.

Les principaux résultats expérimentaux relatifs ux fluctuations intéressant tout le volume du s. c. luctuations de résistance) et aux fluctuations dans la couche limite, sont similaires et peuvent se résumer comme suit :

a. Aux très basses fréquences la C. S. I., $\overline{i_\nu^2}$, du courant parcourant le semi-conducteur, est de plusieurs puissances de 10 supérieure à celle que l'on pourrait déduire de l'effet thermique relatif à la résistance du semi-conducteur, ou de l'effet de grenaille relatif au cristal détecteur;

b. Dans de larges limites de fréquence, $\overline{i_\nu^2}$ décroît avec la fréquence suivant une loi en $\frac{1}{\nu^m}$, où $m \simeq 1$;

c. Pour les fréquences encore plus élevées, $\overline{i_\nu^2}$ décroît suivant une loi en $\frac{1}{\nu^{m'}}$, où cette fois $m' \simeq 2$;

d. $\overline{i_\nu^2}$ est proportionnel à I^n, avec $n \simeq 2$, où I est le courant moyen parcourant le cristal.

3. **Théorie des fluctuations de résistance du semi-conducteur.** — Considérons un monocristal

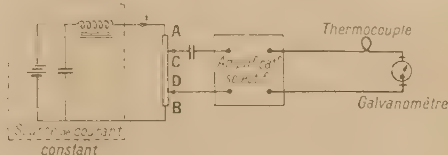


Fig. 1.

filiforme AB d'un semi-conducteur alimenté par une source de courant constant (*fig.* 1).

Soit I l'intensité du courant continu parcourant le s. c. et R la résistance de la portion du s. c. comprise entre les points C et D, nous supposerons que l'impédance d'entrée de l'amplificateur est très grande par rapport à R.

En l'absence du courant, on mesure aux bornes CD une force électromotrice de fluctuation due à l'effet thermique dont la C. S. I. est donnée par

$$(\overline{e_\nu^2})_T = 4kRT, \tag{1}$$

où $k = 1{,}38.10^{-23}$ J.degré$^{-1}$ est la constante de Boltzmann; T, la température absolue du s. c. en degrés Kelvin. $(\overline{e_\nu^2})_T$ est indépendante de la fréquence ν.

La force électromotrice de fluctuation se mesure aux bornes C D à l'aide d'un amplificateur sélectif qui débite dans un thermocouple et un galvanomètre, de sorte que l'indication du galvanomètre est proportionnelle à y_ν^2.

Quand on fait passer le courant I, on constate que la force électromotrice de fluctuation aux bornes CD s'accroît considérablement. Dans ce cas la C. S. I., $(\overline{e_\nu^2})_R$, varie comme le carré du courant; elle dépend de la fréquence suivant les lois décrites au paragraphe précédent.

Pour expliquer cet accroissement de la force électromotrice de fluctuation, nous admettrons que le « bruit supplémentaire » est dû aux fluctuations du nombre des électrons de conduction, ce qui se traduit par des fluctuations de la résistance R du s. c.

Aux bornes CD, la tension $E = RI$ fluctue et l'on a

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta R^2}.I^2. \tag{2}$$

Calculons $\overline{\Delta R^2}$.

Soit N le nombre total des électrons de conduction contenus dans le volume du s. c. compris entre C et D, et σ la conductibilité du s. c.; on a

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial N}\Delta N. \tag{3}$$

A partir de (2) et (3) il vient

$$\overline{\Delta E^2} = R^2 I^2 \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)^2 \overline{\Delta N^2}. \tag{4}$$

Or, on a [8]

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right) = \frac{1}{N},$$

d'où

$$\overline{\Delta E^2} = R^2 I^2 \frac{\overline{\Delta N^2}}{N^2}. \tag{5}$$

Si N_0 est la valeur moyenne de N, on peut écrire

$$N = N_0 + M, \tag{6}$$

où M est la partie fluctuante de N. M est un nombre très petit comparé à N_0, mais cependant assez grand pour que l'on puisse le considérer comme une fonction continue du temps t.

Soient $(\overline{e_\nu^2})_R$ et $\overline{M_\nu^2}$ les C. S. I. de la force électromotrice de fluctuation de résistance et du nombre des électrons de conduction; l'équation (5) s'écrit alors (1)

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\overline{M_\nu^2}}{N_0^2}.$$

Pour étudier la variation de $\overline{M_\nu^2}$ en fonction de la fréquence ν, analysons le mécanisme élémentaire responsable des fluctuations. Nous admettrons avec J. Bernamont [4] qu'un électron de conduction a une vie moyenne $\tau = \frac{1}{\alpha}$, où α est la constante de recombinaison. Après un grand nombre de chocs élastiques de l'électron libre avec les ions du réseau cristallin, l'électron est capturé par un ion et cesse d'être libre. Ainsi, un groupe d'électrons libres comprenant, à un instant donné A électrons, après un temps t ne comprendra que $Ae^{-\alpha t}$ électrons. Pour compenser ces pertes d'autres électrons sont libérés au hasard pendant cet intervalle de temps.

Le temps qui s'écoule entre deux chocs élastiques est très court ($\approx 10^{-13}$ s) comparé à la vie moyenne τ ($\approx 10^{-6}$ s); par conséquent, les chocs inélastiques sont assez rares pour qu'on n'ait pas à modifier sensiblement les équations donnant la conductibilité électrique (2).

Écrivons que le taux de disparition des électrons est proportionnel au nombre M qui représente l'écart entre le nombre instantané N et le nombre le plus probable N_0. Puisque $\frac{M}{N_0} \ll 1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \alpha M = 0. \tag{8}$$

Supposons d'abord α constant, indépendant de la vitesse des électrons, et calculons la fonction de corrélation $\overline{MM_t}$; pour cela, multiplions membre à membre l'équation (8), prise à l'instant t_1, par la même équation prise à l'instant $t_1 - t$ et faisons la moyenne par rapport à t_1. En tenant compte des propriétés des fonctions de corrélation [9], il vient

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\overline{MM_t} + \alpha^2\,\overline{MM_t} = 0. \tag{9}$$

D'où

$$\overline{MM_t} = \overline{\mathbf{M}^2}\, e^{-\alpha t} \qquad \text{pour} \quad t > 0. \tag{10}$$

La C. S. I. de M est donnée par l'expression

$$\overline{M_\nu^2} = 4\int_0^\infty \overline{MM_t}\cos 2\pi\nu t\,\mathrm{d}t$$
$$= 4\overline{\mathbf{M}^2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos 2\pi\nu t\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

(1) Dans le cas où la résistance d'entrée de l'amplificateur sélectif est petite comparée à R, on a pour la C. S. I. $(\overline{i_\nu^2})_R$, du courant fluctuant

$$(\overline{i_\nu^2})_R = I^2 \frac{\overline{M_\nu^2}}{N_0^2}. \tag{7 a}$$

(2) Nous considérons ici un s. c. intrinsèque; dans le cas d'un s. c. extrinsèque, c'est-à-dire contenant des impuretés, les raisonnements s'appliquent encore, à condition de tenir compte des fluctuations du nombre des « centres donneurs ».

En intégrant, on trouve

$$M_\nu^2 = \overline{\mathbf{M}}^2 \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}. \qquad (12)$$

Combinons (7) et (12), on obtient

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\overline{\mathbf{M}}^2}{N_0^2} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}. \qquad (13)$$

Comme les électrons de conduction dans un s. c. obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann, on a

$$\frac{\mathbf{M}^2}{N_0^2} = \frac{1}{N_0}, \qquad (14)$$

d'où

$$(\overline{e_\nu^2})_R = \frac{R^2 I^2}{N_0} \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}. \qquad (15)$$

On voit que la C. S. I. de la force électromotrice de fluctuation est bien proportionnelle au carré du courant moyen. Cependant sa variation en fonction de la fréquence ne correspond pas aux résultats expérimentaux cités plus haut. En effet, pour des fréquences faibles telles que $2\pi\nu \ll \alpha$, on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = \frac{R^2 I^2}{N_0} \frac{4}{\alpha}:$$

la C. S. I. est indépendante de la fréquence; pour des fréquences très élevées, telles que $2\pi\nu \gg \alpha$, on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = \frac{R^2 I^2}{N_0} \frac{\alpha}{\pi^2\nu^2}$$

et la C. S. I. varie comme $\frac{1}{\nu^2}$, mais on ne retrouve pas la portion de la courbe où $(\overline{e_\nu^2})_R$ varie comme $\frac{1}{\nu}$.

Pour obtenir cette partie de la courbe, généralisons les considérations précédentes en attribuant à chaque groupe d'électrons dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ une constante de recombinaison comprise entre α et $\alpha + d\alpha$. Soit, d'autre part, $\overline{M_\alpha^2}$ le carré moyen de M relatif à ce groupe d'électrons. Examinons le cas le plus simple, où les différents groupes d'électrons sont indépendants, on a

$$\left.\begin{aligned} (\overline{e_\nu^2})_R &= \frac{4R^2I^2}{N_0^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\alpha \overline{M_\alpha^2}\, d\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}, \\ \mathbf{M}^2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overline{M_\alpha^2}\, d\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

où α_1 et α_2 sont les constantes limites correspondant aux groupes dont les vitesses sont $v = 0$ et $v = \infty$.

La répercussion sur $(\overline{e_\nu^2})_R$ de la grandeur $\overline{M_\alpha^2}$ qui caractérise un groupe d'électrons est d'autant plus grande que la constante de recombinaison correspondante a une valeur plus faible. Choisissons pour $\overline{M_\alpha^2}$ la forme la plus simple : $\overline{M_\alpha^2} = \frac{B}{\alpha}$, justifiée, d'ailleurs, par les résultats obtenus.

Dans ces conditions, intégrons (16 *b*), il vient

$$\mathbf{M}^2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{B}{\alpha} d\alpha = B \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad B = \frac{\mathbf{M}^2}{\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

(16 *a*) devient alors

$$(\overline{e_\nu^2})_R = 4R^2I^2 \frac{\overline{\mathbf{M}}^2}{N_0^2} \frac{1}{\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}, \qquad (17)$$

et, après intégration,

$$(\overline{e_\nu^2})_R = 4R^2I^2 \frac{\mathbf{M}^2}{N_0^2} \frac{1}{\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{1}{2\pi\nu} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\pi\nu} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{4\pi^2\nu^2}}\right). \qquad (18)$$

L'expression (18) est symétrique par rapport à α_1 et α_2; choisissons donc α_2 plus grand que α_1, et plaçons-nous dans le cas où $\alpha_2 \gg \alpha_1$, donné par l'expérience. Étudions cette expression dans les trois cas suivants :

a. $2\pi\nu \ll \alpha_1 \ll \alpha_2$; on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\overline{\mathbf{M}}^2}{N_0^2} \frac{4}{\alpha_1 \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \qquad (19)$$

$(\overline{e_\nu^2})_R$ est indépendante de la fréquence ν.

b. $\alpha_1 \ll 2\pi\nu \ll \alpha_2$; on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\mathbf{M}^2}{N_0^2} \frac{1}{\nu \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \qquad (20)$$

$(\overline{e_\nu^2})_R$ varie en fonction de la fréquence comme $\frac{1}{\nu}$.

c. $\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll 2\pi\nu$; on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\mathbf{M}^2}{N_0^2} \frac{\alpha_2}{\pi^2\nu^2 \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}. \qquad (21)$$

$(\overline{e_\nu^2})_R$ varie en fonction de la fréquence comme $\frac{1}{\nu^2}$ [3].

De ce qui précède, on voit que $(\overline{e_\nu^2})_R$ est proportionnelle à I^2 et l'on retrouve les trois branches expérimentales de la courbe de $(\overline{e_\nu^2})_R$, en fonction de ν.

Considérons le cas d'un filament de germanium dont les données sont les suivantes [4] :

$R = 1000\,\Omega, \qquad I = 10^{-2} A, \qquad \nu = 1000$ Hz, $\qquad N_0 = 10^{11}$;

supposons, d'autre part, $\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \simeq 20$.

[3] Les écarts maxima des courbes (19), (20) et (21) de la courbe exacte (18) se produisent pour les fréquences $2\pi\nu_1 = \alpha_1$ et $2\pi\nu_2 = \alpha_2$; ces écarts sont de l'ordre de $\frac{\pi}{4}$.

[4] Je remercie M. H. C. Montgomery, Bell Telephone Laboratories, de m'avoir précisé, dans une communication privée, les données expérimentales relatives à ses expériences.

Portons ce valeurs dans l'équation (20), il vient

$$(\overline{e_\nu^2})_R = \frac{R^2 I^2}{N_0} \frac{1}{\nu \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{100}{10^{11} . 10^3 . 20} = 5 . 10^{-14} \, \mathrm{V}^2 : \mathrm{Hz}.$$

L'effet thermique donnerait

$$(\overline{e_\nu^2})_T = 4kRT = 4.1,38.10^{-23}.1000.300 = 1,65.10^{-17} \, \mathrm{V}^2 : \mathrm{Hz},$$

d'où

$$\frac{(\overline{e_\nu^2})_R}{(\overline{e_\nu^2})_T} = 3.10^3.$$

4. Théorie des fluctuations électriques dans un contact métal–s. c. — Avant d'aborder l'étude des fluctuations du courant traversant un contact métal-semi-conducteur, nous allons passer en revue les propriétés physiques d'un tel contact.

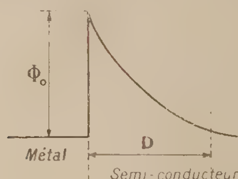


Fig. 2.

On sait [8] qu'au contact d'un métal avec un s. c. extrinsèque il se forme du côté du s. c. (5) une couche limite dite « couche de barrage » (*fig.* 2). Cette couche, de faible épaisseur, ne contient pratiquement que les charges positives des « centres donneurs » (6).

Plusieurs théories ont été avancées pour expliquer le comportement d'un tel contact. Les deux plus répandues sont :

a. La théorie de la diffusion, applicable quand l'épaisseur de la « couche de barrage » est grande, comparée au libre parcours moyen des électrons;

b. La théorie de la diode qui s'applique au cas où l'épaisseur de la couche est petite, en comparaison avec le libre parcours moyen des électrons.

Cette dernière théorie semble mieux s'appliquer aux cristaux détecteurs de germanium et silicium. C'est le cas qui nous intéresse ici.

Soient :

J_m, la densité du courant électronique allant du métal au s. c.;

J_{sc}, la densité du courant électronique allant du s. c. au métal;

J, la densité du courant électronique résultant;

V, la tension appliquée au cristal;

Φ_0, la hauteur de la barrière de potentiel;

D, l'épaisseur de la barrière pour une tension appliquée V;

D_0, l'épaisseur de la barrière pour une tension appliquée $V = 0$;

n, la densité des électrons de conduction dans le s. c.;

p, la densité des « centres donneurs » dans la barrière;

ε, la constante diélectrique du s. c.;

e, la charge de l'électron;

m, la masse de l'électron.

Dans la théorie de la diode, on démontre les formules suivantes :

$$J_m = \frac{1}{2} ne \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{e\Phi_0}{kT} \right), \tag{22}$$

$$J_{sc} = \frac{1}{2} ne \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{e(\Phi_0 - V)}{kT} \right], \tag{23}$$

$$\begin{aligned} J &= J_{sc} - J_m \\ &= \frac{1}{2} ne \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp\left[-\frac{e(\Phi_0 - V)}{kT} \right] \right. \\ &\qquad \left. - \exp\left[-\frac{e\Phi_0}{kT} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$D = \left[\frac{2\varepsilon(\Phi_0 - V)}{ep} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Nous allons modifier les formules précédentes comme suit :

Soit S la section moyenne de la barrière de potentiel parcourue par le courant; S est de l'ordre de grandeur de la section de la pointe métallique en contact avec le s. c. Dans les cas habituels, $S \approx 10^{-6}$ cm².

Soient $P = pSD$ le nombre total des « centres donneurs » contenus dans le volume SD de la barrière et N le nombre total des électrons de conduction contenus dans le volume du s. c. parcouru par le courant; on a $N = anSL$, où L est l'épaisseur de la pastille du s. c. et a une constante numérique qui tient compte de l'épanouissement des lignes de courant dans le s. c.

Le courant total est donné par

$$\begin{aligned} I = I_{sc} - I_m = SJ = AN \Bigg[& \exp\left(-\frac{e^2 DP}{2\varepsilon SkT} \right) \\ & - \exp\left(-\frac{e^2 D_0^2 P}{2\varepsilon SDkT} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{26}$$

avec

$$A = \frac{1}{2} e \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{aL}.$$

Considérons maintenant les différents effets de fluctuation qui se rapportent au cristal :

(5) Nous considérons ici le cas d'un semi-conducteur du type n, le cas d'un s. c. du type p s'en déduit aisément.

(6) Tout se passe, en quelque sorte, comme si les électrons de conduction du s. c. s'étaient déversés dans le métal.

1° L'effet de grenaille. La C. S. I. est donnée dans ce cas par

$$(\overline{i_\nu^2})_g = 2e(I_{sc} + I_m), \qquad (27)$$

car les fluctuations des deux courants sont indépendantes.

2° L'effet thermique dans la « résistance d'étalement » du contact. Soit σ la conductibilité du s. c., r le rayon du fil métallique au contact avec le s. c.; la « résistance d'étalement » s'écrit alors

$$R_e = \frac{1}{4\pi\sigma}.$$

La C. S. I. de l'effet thermique est donnée par

$$(\overline{e_\nu^2})_T = 4kR_eT. \qquad (28)$$

Dans la gamme des fréquences qui nous intéresse (fréquences inférieures à quelques Mc : s), les effets cités plus haut sont indépendants de la fréquence.

3° Les fluctuations de la barrière de potentiel que nous attribuons aux deux effets suivants :

a. Les fluctuations du nombre P des « centres donneurs ». Ces fluctuations sont dues aux migrations des « centres donneurs » à travers la surface limitant le volume intéressé SD;

b. Les fluctuations du nombre N des électrons de conduction dans le volume aSL résultant de la recombinaison avec les « centres donneurs » contenus dans ce volume. Cet effet correspond aux fluctuations de résistance étudiées au paragraphe précédent.

Nous admettrons que ces deux effets sont indépendants. Dans ces conditions, la C. S. I. de la fluctuation du courant est donnée par

$$(\overline{i_\nu^2})_B = I^2 \frac{\overline{\Delta N_\nu^2}}{N^2} + \left(\frac{\Phi_0 - V}{kT}\right)^2 \left[I_{sc} - \frac{\Phi_0}{\Phi_0 - V} I_m\right]^2 \frac{\overline{\Delta P_\nu^2}}{P_2}. \qquad (29)$$

Le premier terme est relatif aux électrons et correspond aux fluctuations de résistance [éq. (7 *a*)]; le deuxième terme, qui est généralement prépondérant dans les cas pratiques, est relatif aux « centres donneurs ».

Pour étudier l'analyse en fréquence de $(\overline{i_\nu^2})_B$, reprenons les raisonnements du paragraphe précédent en posant

$$N = N_0 + M, \quad \text{avec} \quad \frac{M}{N_0} \ll 1,$$

$$P = P_0 + Q, \quad \text{avec} \quad \frac{Q}{P_0} \ll 1,$$

et soient α_1 et α_2, β_1 et β_2 les constantes de recombinaison limites relatives aux électrons et aux « donneurs », respectivement. Posons

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = \frac{1}{\log\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{1}{2\pi\nu} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2\pi\nu} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{4\pi^2\nu^2}}\right], \qquad (30)$$

et comme plus haut

$$\frac{\overline{M^2}}{N_0^2} = \frac{1}{N_0} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{Q^2}}{P_0^2} = \frac{1}{P_0},$$

l'équation (29) devient

$$(\overline{i_\nu^2})_B = \frac{I^2}{N_0}\psi(\alpha_1, \alpha_2, \nu) + \frac{1}{P_0}\left(\frac{\Phi_0 - V}{kT}\right)^2\left[I_{sc} - \frac{\Phi_0}{\Phi_0 - V} I_m\right]^2 \psi(\beta_1, \beta_2, \nu), \qquad (31)$$

Pour de très faibles fréquences, le dernier terme l'emporte de beaucoup sur le premier; ce n'est qu'aux fréquences plus élevées que le premier terme devient important. En basses fréquences on peut utiliser l'expression approximative

$$(\overline{i_\nu^2})_B \simeq \frac{1}{P_0}\left(\frac{\Phi_0 - V}{kT}\right)^2\left[I_{sc} - \frac{\Phi_0}{\Phi_0 - V} I_m\right]^2 \psi(\beta_1, \beta_2, \nu). \qquad (32)$$

Considérons l'exemple suivant :

$V = -0,3\,\text{V}$ (courant inverse), $\Phi_0 = 0,5\,\text{V}$,

$S = 10^{-6}\,\text{cm}^2$, $D = 10^{-6}\,\text{cm}$,

$p = 10^{18}$ par centimètre cube, $I_m = 10^{-5}\,\text{A}$.

On a

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_0 - V} I_m \gg I_{sc}, \qquad P_0 = 10^6, \qquad \frac{\Phi_0}{kT} \simeq 20;$$

prenons

$$\log\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \simeq 20, \qquad \nu = 1000 \text{ Hz}$$

et portons ces valeurs dans l'équation (32), on a

$$(\overline{i_\nu^2})_B = 10^{-6}.400.10^{-10}.10^{-3}.\frac{1}{20} = 2.10^{-18}\,\text{A}^2 : \text{Hz}.$$

Supposons que la résistance du cristal soit de 300 Ω, on a

$$(\overline{e_\nu^2})_B = 18.10^{-14}\,\text{V}^2 : \text{Hz}.$$

Pour une même résistance, l'effet thermique donne

$$(\overline{e_\nu^2})_T = 4.1,38.10^{-23}.300.300 = 5.10^{-18}\,\text{V}^2 : \text{Hz}.$$

La température équivalente est :

$$t = \frac{(\overline{e_\nu^2})_B}{(\overline{e_\nu^2})_T} = 3.6.10^4.$$

5. **Discussion.** — Dans le cas le plus général, on peut considérer un semi-conducteur, une résistance à structure granuleuse (résistance à carbone, microphone à granules de charbon, etc.), les couches métalliques minces, etc., comme étant composés de micro-cristaux en contact plus ou moins intime. Quand on étudiera les fluctuations dans ces structures « granuleuses », on aura à tenir compte, en plus de l'effet thermique et de l'effet de grenaille, aussi bien des fluctuations de résistance que de

celles de la couche de transition entre granules; on appliquera une formule du type (31), qui comprend les deux effets supplémentaires.

Les deux fonctions $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \nu)$ et $\psi(\beta_1, \beta_2, \nu)$, l'une relative aux électrons, l'autre aux « centres donneurs » ont même allure générale. Toutefois, étant donné la plus faible mobilité des « donneurs », $\psi(\beta_1, \beta_2, \nu)$ n'aura une valeur importante qu'aux très basses fréquences, mais sera négligeable devant $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \nu)$ pour les fréquences plus élevées.

Au paragraphe 4 nous avons étudié les fluctuations de la barrière de potentiel dans le cas de la théorie de la diode. On pourrait reproduire des raisonnements similaires dans le cas de la théorie de la diffusion.

APPENDICE.

Étude des fluctuations de résistance dans le cas des courants très forts [7].

Reprenons l'équation (7) du paragraphe 3, on a

$$(\overline{e_\nu^2})_R = R^2 I^2 \frac{\overline{\mathbf{M}}^2}{N_0^2}. \qquad (A.1)$$

Nous avons déjà remarqué que $(\overline{e_\nu^2})_R$ était proportionnelle à I^2. Cependant, l'expérience montre que, pour des courants croissants, $(\overline{e_\nu^2})_R$ croît moins vite que I^2 et tend à devenir proportionnel à I pour des très forts courants.

Pour obtenir (A.1) nous avons admis implicitement que la loi d'Ohm s'appliquait au s. c. et que sa conductibilité était constante, indépendante du champ électrique F appliqué au s. c. En d'autres termes, F pouvait être considéré comme une faible perturbation, ce qui permettait d'appliquer au s. c. la théorie de Lorentz-Sommerfeld. Cette condition s'écrit $F\lambda \ll \frac{kT}{e}$, où λ est le libre parcours moyen des électrons.

Si le champ électrique F appliqué au s. c. devient suffisamment élevé pour que cette relation ne soit lus valable et que l'on ait $F\lambda \gg \frac{kT}{e}$, c'est-à-dire que l'énergie acquise par l'électron entre deux chocs est grande comparée à l'énergie moyenne d'agitation thermique, la théorie de conduction de Lorentz-Sommerfeld ne s'applique plus.

Nous envisagerons les deux cas suivants :

1° $\quad F\lambda \gg \frac{kT}{e} \quad (\lambda \ll L)$;

2° $\quad F\lambda \gg \frac{kT}{e} \quad (\lambda \gg L)$,

où L est la longueur totale du s. c.

([7]) *Voir* aussi [10] et [11].

1° Considérons d'abord le cas

$$F\lambda \gg \frac{kT}{e} \qquad (\lambda \ll L).$$

Soit v la vitesse de l'électron, φ l'angle que fait la vitesse avec l'axe du cylindre (que forme le filament s. c.) dont la longueur est L. La contribution d'un électron au courant total est

$$\delta i = \frac{ev}{L}\cos\varphi. \qquad (A.2)$$

Formons le produit $\overline{\delta i(t+\theta)\,\delta i(t)}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \overline{\delta i\,\delta i_\theta} &= \frac{e^2 v^2}{L^2}\cos^2\varphi \qquad \text{pour} \quad 0 < \frac{l}{v}, \\ \overline{\delta i\,\delta i_\theta} &= 0 \qquad \text{pour} \quad 0 > \frac{l}{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (A.3)$$

où l est la longueur du parcours libre de l'électron de vitesse v. Comme le temps moyen qui s'écoule entre deux chocs successifs de l'électron sur les ions du réseau est très court ($\approx 10^{-13}$ s) comparé aux inverses des fréquences qui nous intéressent, la C. S. I. δi_ν^2, pour les fréquences $\nu \ll \frac{v}{l}$, en tenant compte de (A.3), s'écrit

$$\begin{aligned} \overline{\delta i_\nu^2} &= 4\int_0^\infty \overline{\delta i\,\delta i_\theta}\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{l}{v}} \frac{e^2 v^2}{L^2}\cos^2\varphi\,d\theta = \frac{4e^2 vl}{L^2}\cos^2\varphi. \end{aligned} \qquad (A.4)$$

Pour tous les électrons, supposés indépendants, nous devons prendre la moyenne sur toutes les vitesses, tous les parcours et tous les angles φ, il vient

$$\overline{i_\nu^2} = \frac{4e^2 \bar{v}\lambda}{L^2} nLS = \frac{4e^2 \bar{v}\lambda nS}{L}, \qquad (A.5)$$

puisque pour les intensités des champs électriques considérés on a $\overline{\cos^2\varphi} = 1$. n est la densité des électrons de conduction et S la section du s. c.

Or, comme le courant moyen est donné par

$$I = en\bar{v}S, \qquad (A.6)$$

(A.5) devient

$$\overline{i_\nu^2} = \frac{4e\lambda}{L} I. \qquad (A.7)$$

D'après (A.7), $\overline{i_\nu^2}$ serait proportionnel à I. Cependant, pour des fortes valeurs du champ électrique, λ croît, de sorte qu'en fait $\overline{i_\nu^2}$ croît plus vite avec I que ne l'indique (A.7).

2° Considérons maintenant le cas extrême où

$$F\lambda \gg \frac{kT}{e} \qquad (\lambda \gg L).$$

On devrait, dans ce cas, retrouver pour $\overline{i_\nu^2}$ l'expression de l'effet de grenaille dans une diode saturée.

Soit un électron se trouvant à une distance x de l'électrode au potentiel positif (*fig.* 3). Comme dans le cas précédent, on a

$$\delta i = \frac{ev}{L} \cos\varphi,$$

et

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{\delta i\,\delta i_0} = \dfrac{e^2 v^2}{L^2} \cos^2\varphi & \text{pour } 0 < \dfrac{x}{v}, \\ \overline{\delta i\,\delta i_0} = 0 & \text{pour } 0 > \dfrac{x}{v}, \end{array}\right\} \qquad (A.8)$$

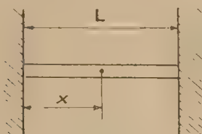


Fig. 3.

Calculons la C. S. I., $\overline{\delta i_\nu^2}$, pour des fréquences $\nu \ll \dfrac{v}{x}$, il vient

$$\overline{\delta i_\nu^2} = 4\int_0^\infty \frac{e^2 v^2}{L^2} \cos^2\varphi \, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{x}{v}} \frac{e^2 v^2}{L^2} \cos^2\varphi \, d\theta = \frac{4 e^2 vx}{L^2} \cos^2\varphi. \qquad (A.9)$$

Pour les électrons se trouvant dans la tranche dx à la distance x, on a

$$d\overline{i_\nu^2} = \frac{4 e^2 xv}{L^2} \cos^2\varphi \, S n \, dx \qquad (A.10)$$

et pour tous les électrons du s. c. on obtiendra $\overline{i_\nu^2}$ en intégrant (A.10) de zéro à L, soit

$$\overline{i_\nu^2} = \int_0^L d\overline{i_\nu^2}$$

$$= \int_0^L \frac{4 e^2 v S n x}{L^2} \cos^2\varphi \, dx = 2 e^2 v S n \cos^2\varphi. \qquad (A.11)$$

Faisons la moyenne sur toutes les vitesses v et tous les angles φ; on a

$$\overline{i_\nu^2} = 2 e^2 \bar{v} S n.$$

Comme $I = e\bar{v}\, Sn$, on a

$$\overline{i_\nu^2} = 2 e I, \qquad (A.12)$$

c'est l'expression de la C. S. I. de l'effet de grenaille dans une diode saturée.

Nous pourrons conclure en disant que la C. S. I. du courant de fluctuations de résistance croît en fonction du courant I, d'abord comme I^2 pour devenir proportionnelle à I aux très forts courants.

Manuscrit reçu le 13 avril 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Mc Farlane G. G. — *Proc. Phys. Soc.*, London, 1947, **59**, 366.
[2] Van der Ziel A. — *Physica*, 1950, **16**, 359.
[3] Mc Farlane G. G. — *Proc. Phys. Soc.*, London, *B*, 1950, **63**, 807.
[4] Bernamont J. — *Proc. Phys. Soc.*, London, 1937, **49** extra part, 138.
[5] Surdin M. — *J. Physique Rad.*, 1939, **10**, 188.
[6] Miller P. H. — *Proc. I. R. E.*, 1947, **35**, 252.
[7] Angello S. J. — *Electrical Engineering*, 1949, octobre, p. 865. — Montgomery M. C. et Shockley W. — *Bull. Am. Phys. Soc.*, 1950, **25**, n° 2, 16.
[8] Torrey H. C. et Whitmer Ch. A., *Crystal Rectifiers*. Mc Graw-Hill, 1948.
[9] Bernamont J. — *Ann. de Physique*, 1937, **7**, 71.
[10] Weisskopf V. F. — On the theory of Noise in conductors, Semiconductors and Crystal Rectifiers, N. D. R. C. p. 14-133. 15 mai 1943,
[11] Davydov, B. I. et Gurevich, B. Kh., *J. of Phys. U.R.S.S.*, 1943, **7**, n° 3, 138.

MÉTHODE D'OSCILLATION DANS LA PILE. APPLIQUÉE A LA COMPARAISON D'ÉCHANTILLONS DE GRAPHITE

Par A. ERTAUD, V. RAIEVSKI et D. BRETON.
Commissariat à l'Énergie atomique. Fort de Châtillon, Fontenay aux Roses.

Sommaire. — On fait osciller lentement dans le réflecteur d'une pile un échantillon de substance diffusante et absorbante et l'on étudie le signal périodique que cette oscillation produit dans une chambre d'ionisation.

Cette étude montre que pour certaines positions relatives de l'échantillon et de la chambre, la variation des propriétés capturantes de la substance oscillante se traduit par une variation du déphasage entre le mouvement de l'oscillateur et le signal reçu, lorsque les propriétés diffusantes restent invariables.

Ce résultat permet la mise en œuvre d'une méthode de comparaison entre des échantillons de substance diffusante très faiblement capturante et en particulier la comparaison de graphites de qualité nucléaire.

Avec l'appareillage actuellement utilisé, l'examen d'échantillons de 3 kg de graphite permet leur comparaison à ± 0,1 partie par million de bore (écart standard).

Introduction. — L'effet sur le fonctionnement d'une pile de l'oscillation d'un absorbeur a été étudié théoriquement par A. M. Weinberg et H. C. Schweinler [1], et utilisé pour comparer entre elles les sections efficaces de capture, en particulier par A. Langsdorf Jr [2], Hoover et al [3], F. C. W. Colmer et D. J. Littler [4].

Deux procédés ont été particulièrement utilisés :

1° Oscillation de période assez grande devant la période des neutrons retardés, appareil de mesure loin de la position moyenne de l'oscillateur. Dans ce cas on enregistre une modulation globale de la pile (cette dernière pouvant « suivre » l'oscillateur du fait de la lenteur de l'oscillation). C'est la méthode employée en particulier par A. Langsdorf Jr [2].

2° Oscillation de période courte devant celle des neutrons retardés, appareil de mesure le plus voisin possible de l'oscillateur. La pile ne « suit » pas. Dans ce cas on enregistre une modulation locale au voisinage immédiat de la substance oscillante. C'est la méthode employée par Hoover et al [3].

Dans toutes ces mesures on essaie autant que possible de se débarrasser du signal de diffusion.

Au lieu de se débarrasser du signal de diffusion, il est intéressant d'essayer d'en tirer parti, surtout dans le cas où la substance à examiner est beaucoup plus diffusante que capturante (cas du graphite en particulier), comme l'ont signalé V. Raievski et J. Yvon [5]. On y parvient en plaçant l'appareil détecteur dans une position convenable par rapport à l'oscillateur, de façon qu'il enregistre un signal qui soit la résultante du signal local et du signal global. L'expérience montre que, dans ce cas, on peut comparer des échantillons d'une substance diffusante très peu capturante par la mesure de l'angle de déphasage entre le signal observé et le mouvement de l'oscillateur. Cette mesure de déphasage offre des avantages que nous examinerons.

Modulation globale de la pile. — L'étude de A. M. Weinberg et H. C. Schweinler (*loc. cit.*) permet de voir que la modulation globale du nombre de neutrons de la pile produite par un corps absorbant et diffusant qui oscille, est proportionnelle à la densité existant à la position moyenne de l'oscillateur avant l'introduction de l'absorbeur.

Nous avons choisi une période de 28,4 s (période de résonance du galvanomètre). Pour cette fréquence le calcul adapté à la pile de Châtillon montre que le signal global sera déphasé de 30° en arrière sur le mouvement de l'oscillateur.

Modulation locale. — Une perturbation périodique dans le réflecteur d'une pile (produit par oscillation d'un corps diffusant et absorbant) va donner lieu dans la région du réflecteur où est situé l'échantillon oscillant, à une modulation de la densité de neutrons.

Écrivons que la variation dans le temps de la densité de neutrons est égale au nombre de neutrons diffusant dans l'unité de volume diminué du nombre de neutrons capturés et augmenté des sources q. Soit

$$D\nabla^2 n - \frac{n}{\tau} - q = \frac{\partial n}{\partial t},$$

avec D, coefficient de diffusion; τ, temps de vie des neutrons.

Si l'on prend pour expression de la source pulsante qui représentera l'effet de l'échantillon oscillant

$$q = \lambda\, e^{i\omega t}\, \delta\left(\vec{r}\right),$$

on trouve qu'à une distance r de la source, la perturbation est donnée par l'expression

$$\frac{\lambda}{4\pi D}\, e^{i\omega t}\, \frac{e^{-\frac{r}{L}\sqrt{1+i\omega\tau}}}{r},$$

L étant la longueur de diffusion. Le déphasage est donc donné par l'expression

$$-\frac{r}{L}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{2}}.$$

Dans l'expérience considérée r est de l'ordre de L et $\omega\tau \approx 10^{-3}$. Le déphasage est par conséquent tout à fait négligeable et l'on constate aussi que la perturbation décroît très vite si le lieu de mesure s'éloigne du centre d'oscillation $\left(\text{en } \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r}\right)$. Cette modulation locale est limitée à peu près au graphite réflecteur et ne serait pas modifiée de façon décelable si la pile était remplacée par une source constante de neutrons.

Par conséquent, on peut se représenter schématiquement le signal total produit par l'oscillation d'un échantillon dans le réflecteur de la pile, comme la superposition de deux signaux, un signal local en phase avec le mouvement de l'échantillon décroissant très vite si l'on s'éloigne de l'échantillon, et un signal de modulation globale déphasé d'un angle de 30° en arrière sur le mouvement de l'oscillateur. Les amplitudes de ces deux signaux sont chacune proportionnelles à l'aire d'absorption et à celle de diffusion de l'échantillon, les coefficients de proportionnalité dépendant de la forme et de la position moyenne de l'échantillon dans le réflecteur.

Dispositif de mesure. — L'échantillon se déplace d'un mouvement alternatif dans un canal ménagé dans le réflecteur et qui traverse ce dernier de part en part. L'échantillon obture aussi bien que possible la section droite du canal. Ce dispositif donne une grande importance à l'effet de diffusion de l'échantillon. Ce dernier en effet va diffuser dans

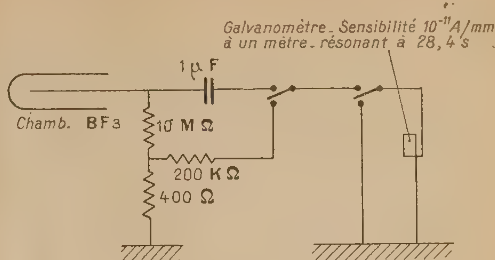


Fig. 2.

le réflecteur des neutrons qui sans cela seraient sortis complètement, ou auraient suivi dans le réflecteur un chemin différent. Le rôle plus ou moins transparent de l'échantillon dépendra de sa longueur d'obstruction pour une position donnée dans le canal et pour une longueur donnée de sa position dans le canal.

Le bloc de graphite à étudier est déplacé d'un mouvement alternatif, grâce au mécanisme simple dont le schéma est donné sur la figure 1.

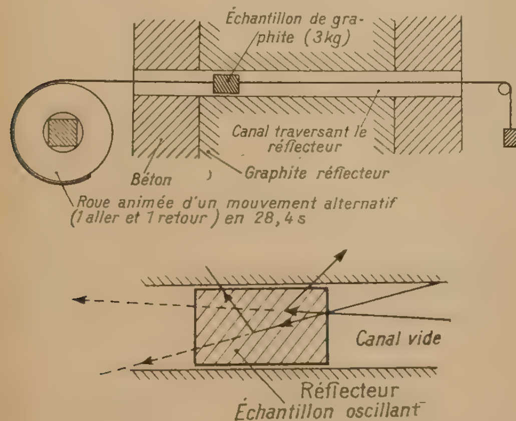


Fig. 1.

L'appareil détecteur est une chambre à trifluorure de bore; un condensateur coupe la composante continue du courant d'ionisation, et la composante alternative est mesurée à l'aide d'un galvanomètre résonant sensible. La figure 2 donne le schéma de montage de l'installation.

Dans les conditions d'utilisation, la sensibilité du galvanomètre est 10^{-11} A : mm à 1 m, la fréquence de résonance qui est aussi celle de l'oscillateur est de 28,4 s.

La fréquence étant très basse, le déphasage peut être mesuré par un opérateur. Lorsque l'échantillon passe par sa position médiane en s'enfonçant dans la pile, il déclenche une échelle commandée par un diapason entretenu. L'opérateur bloque cette échelle lorsque le spot du galvanomètre atteint une position extrême (à droite par exemple). L'intervalle de temps, proportionnel au déphasage, est donné directement par lecture de l'échelle [1].

Étude expérimentale du signal enregistré par une chambre voisine de l'échantillon oscillant. — On dispose dans le réflecteur une chambre à bore placée de telle sorte qu'elle soit voisine du centre d'oscillation.

Au cours de toutes les mesures l'amplitude du mouvement de l'oscillateur a été constante (70 cm) ainsi que la masse de l'échantillon (3 kg).

On fait osciller un échantillon très diffusant et

[1] La mesure ne se fait pas au passage par zéro du spot, car au cours de la mesure, la pile évolue lentement et le zéro se déplace.

peu absorbant (graphite) et l'on mesure l'amplitude et le déphasage du signal par rapport au mouvement de l'oscillateur. Puis on ajoute des quantités connues d'un absorbeur (bore) et l'on recommence

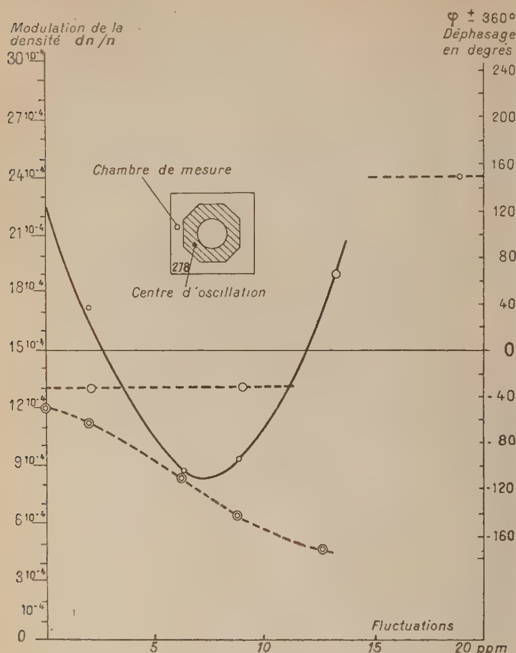


Fig. 3.

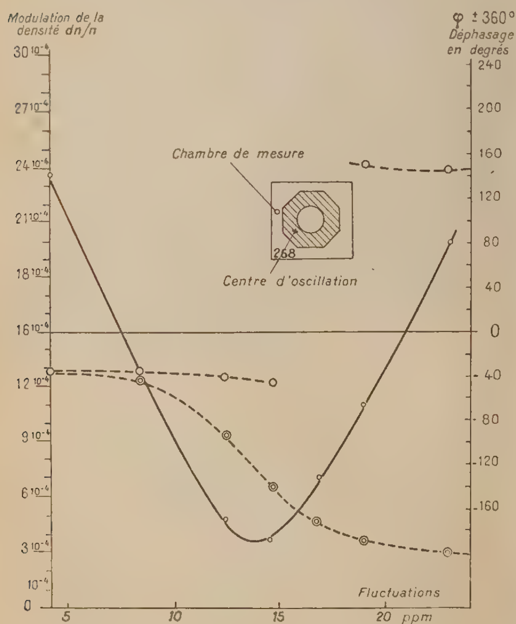


Fig. 4.

les mesures. Les graphiques n°s 3 et 4 donnent un exemple des résultats obtenus. Sur ces graphiques on a porté en abscisses la proportion relative du bore (exprimée en parties par million). En ordonnées, à gauche, on a porté l'amplitude de la modulation de la densité de neutrons autour de sa valeur moyenne ramenée à cette valeur moyenne. En ordonnées à droite, on a porté le déphasage entre le mouvement de l'oscillateur et celui du signal. La courbe en traits continus est celle de la variation d'amplitude relative $\frac{\delta n}{n}$ en fonction de la quantité d'absorbeur ajoutée au graphite.

La courbe en traits pointillés représente le déphasage du signal par rapport au mouvement de l'oscillateur. Sur le même graphique, on a représenté une coupe schématique de la pile perpendiculaire à son axe vertical; les nombres indiqués sur ce schéma donnent la position à partir de la paroi extérieure du protecteur de béton.

On constate alors que l'effet de la variation de la quantité d'absorbeur dans l'échantillon se traduit par une courbe de variation d'amplitude du signal à allure hyperbolique présentant un minimum non nul, et par une courbe de variation de phase.

De plus, l'expérience montre que le minimum d'amplitude diminue au fur et à mesure qu'on éloigne le centre d'oscillation de la chambre de mesure. La courbe de variation de déphasage se creuse de plus en plus, si la chambre de mesure s'éloigne du centre d'oscillation.

Interprétation des résultats. — Si l'on appelle a_1 et $b_1 x$ la modulation locale due à la diffusion et à la capture (a_1 et b_1 dépendant d'une façon complexe de la position relative de la chambre et de l'oscillateur), le signal local sera représenté par $a_1 + b_1 x$ (en phase avec l'oscillateur).

Si l'on appelle c et dx la modulation globale due à la diffusion et à la capture et si l'on prend le mouvement de l'oscillateur comme origine des phases, le signal dû à la modulation globale sera $(c - dx)\,e^{i\gamma}$, γ étant l'angle du déphasage du signal global par rapport au mouvement de l'oscillateur ou au signal local.

Appelons alors x_0 le facteur caractérisant la surface de capture du graphite seul (y compris les impuretés qu'il contient) et x_1 le facteur caractérisant celle qui est ajoutée (sous forme de bore par exemple) dans l'échantillon (x_0 et x_1 s'exprimant en unités arbitraires : section totale de capture ou pourcentage en poids d'une substance absorbante connue). Le signal total ramené à la densité n avant perturbation sera

$$\frac{\delta n}{n} = \underbrace{[c - d(x_0 + x_1)]\,e^{i\gamma}}_{\text{global}} + \underbrace{[a_1 + b_1(x_0 + x_1)]}_{\text{local}}.$$

Il est intéressant de tracer le diagramme vectoriel

traduisant cette équation en séparant la partie fixe de la partie variable lorsque x varie

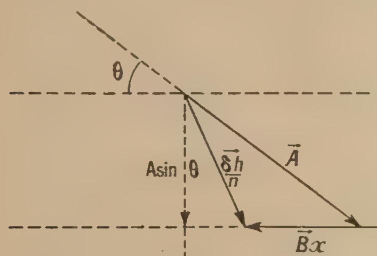
$$\frac{\vec{\delta n}}{n} = [(c - dx_0)\,e^{i\gamma} + a_1 + b_1 x_0] + [(b_1 - d\,e^{i\gamma})\,x_1].$$

Si l'on pose

$$\vec{A} = (c - dx_0)\,e^{i\gamma} + a_1 + b_1 x_0, \qquad \vec{B} = b_1 - d\,e^{i\gamma},$$

$$\frac{\vec{\delta n}}{n} = \vec{A} + \vec{B} x_1;$$

d'où le diagramme vectoriel ci-dessous et



$$\left|\frac{\delta n}{n}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 x_1^2 - 2ABx_1\cos\theta}.$$

θ désignant l'angle fixe entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}x_1$. On voit d'après l'équation précédente que la variation de l'amplitude $\left|\frac{\delta n}{n}\right|$ en fonction de x_1 est hyperbolique.

Le diagramme vectoriel montre que si x_1 varie le déphasage de $\frac{\vec{\delta n}}{n}$ par rapport à un vecteur fixe du plan va changer.

De plus, les formules montrent que la pente de la courbe traduisant la variation de la phase du signal total est maxima lorsque l'amplitude du signal est minima. De l'interprétation schématique précédente on peut aussi déduire que la pente maxima de la courbe de variation de phase avec x_1 croît lorsque le signal minimum décroît. Les expériences montrent que lorsqu'on augmente la distance entre le centre d'oscillation et la chambre de mesure, le signal minimum décroît, il faut augmenter x_1 pour obtenir le signal minimum et la pente de la variation de phase augmente.

Étude du signal global. — Sur une suggestion de M. L. Kowarski nous avons fait des mesures analogues aux précédentes, mais en plaçant la chambre de mesure le plus loin possible de l'échantillon oscillant. Comme il fallait s'y attendre on ne constate plus de variations de déphasage à proprement parler, mais une addition algébrique des effets d'absorption et de diffusion avec annulation du signal lorsque, avec les notations du paragraphe précédent, $c = dx$.

Le déphasage fixe trouvé entre signal global et mouvement de l'oscillateur est — 33° (à comparer avec — 30° donnés par la théorie élémentaire).

En résumé, l'interprétation précédente rend bien compte des faits expérimentaux constatés.

Application à la comparaison de graphites. — Caractérisons comme ci-dessus par x_0 la capture propre à un échantillon de graphite et par x_1 la capture ajoutée (par unité de masse).

La substance capturante ajoutée est du bore (papier filtre imbibé de borate de sodium); si p est la masse en microgrammes de bore et P la masse de l'échantillon en grammes on a $x_1 = \frac{p}{P}$.

Les papiers imbibés de borate de sodium sont introduits dans un logement prévu à cet effet dans l'échantillon de graphite.

a. Recherche de la position optima du centre d'oscillation. — L'étude précédente (par exemple *fig.* 3 et 4) montre que la pente de la variation de la phase dans la région du minimum d'amplitude croît lorsque le centre d'oscillation de l'échantillon s'éloigne de la pile, mais qu'il faut ajouter d'autant plus d'absorbeur à l'échantillon pour obtenir ce minimum qu'on éloigne le centre d'oscillation de la pile (l'effet diffusant augmente quand on écarte le centre d'oscillation). Mais parallèlement l'amplitude minima du signal décroît. Aussi est-on conduit à choisir une position pour laquelle l'amplitude minima est suffisamment grande pour que les fluctuations de la pile ne soient pas gênantes (on diminue leur importance en prenant la moyenne d'un certain nombre de mesures).

On trouve ainsi empiriquement une position du centre d'oscillation pour laquelle la variation de phase, correspondant à une variation d'absorbeur équivalent à une partie par million de bore dans l'échantillon, est de 19°.

Dans ces conditions expérimentales l'écart standard d'une mesure donnée par la moyenne de 40 lectures est 1/10e de partie par million de bore introduit dans l'échantillon.

Mais l'étendue utilisable de la courbe de phase (partie sensiblement rectiligne) correspond seulement à une variation de quatre parties par million de bore dans l'échantillon.

Pour comparer entre eux les graphites examinés, qui diffèrent de moins de deux parties par million, on constate expérimentalement qu'il est nécessaire pour la position choisie du centre d'oscillation d'ajouter un absorbeur constant à tous les échantillons.

b. Conduite de la mesure. — Les échantillons de graphite sont des blocs parallélipipédiques taillés aux cotes extérieures suivantes : 99 × 95 × 190 mm.

Un échantillon est choisi comme étalon et par adjonction d'une quantité connue de bore on trace une courbe de variation du déphasage en fonction de la quantité de bore introduite.

On obtient ainsi une courbe d'étalonnage pour la position d'oscillation et la masse d'échantillon choisies.

Il suffit ensuite de faire osciller les échantillons à examiner, la mesure du déphasage et la courbe d'étalonnage donnent immédiatement la comparaison cherchée exprimée en partie par million de bore entre les échantillons et l'étalon.

c. Précautions à prendre. — Du fait de l'utilisation d'un système résonant, le déphasage est très sensible à la variation de fréquence de l'oscillateur, il est donc nécessaire de stabiliser avec soin la vitesse du moteur.

Le déphasage varie très peu pour une variation

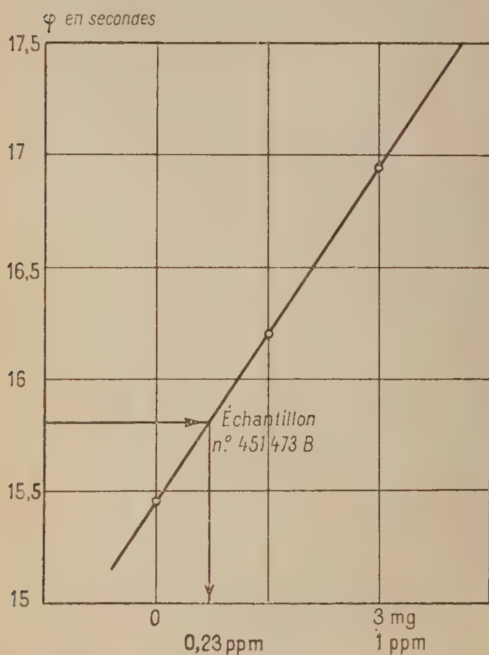


Fig. 5.

faible de la masse de l'échantillon relativement à la masse totale. On a fait varier la masse d'un échantillon de dimensions données en ménageant des trous de faible diamètre dans cet échantillon. L'expérience montre que jusqu'à une variation de masse de 200 g sur un échantillon de 3 kg la variation de déphasage correspond à environ 0,03 partie par million pour une variation de masse de 100 g pour les graphites examinés. De plus, si l'on diminue la longueur de l'échantillon, les résultats sont sensiblement indépendants de cette longueur lorsqu'elle varie de 1 cm.

Exemple d'une mesure. — La figure 5 montre un exemple de courbe d'étalonnage; en abscisses on porte la quantité de bore ajouté exprimée en parties par million et en ordonnées le déphasage entre le mouvement de l'oscillateur et le signal exprimé en secondes.

Par exemple, la mesure de l'échantillon 4 S1-473 B a donné 15,82 s (moyenne de 40 mesures); la courbe d'étalonnage montre alors que cet échantillon contient $0,23 \pm 0,1$ (écart standard) partie par million de bore de plus que le graphite étalon.

Avantages de la méthode. — Le déphasage mesuré est proportionnel au rapport $\frac{fS_a}{fS_d}$, f étant le flux de neutrons régnant dans la région où oscille l'échantillon, S_a et S_d les surfaces de capture et de diffusion. Ce déphasage est par conséquent indépendant d'une variation lente de la puissance de la pile. De plus la méthode n'exige pas que l'échantillon ait une masse et des dimensions parfaitement définies (sauf en ce qui concerne la section droite), nous avons vu que des variations de masse ou de longueur de l'échantillon de l'ordre de 3 pour 100 n'entraînent qu'une erreur négligeable, ce qui simplifie considérablement la préparation des échantillons qui peuvent être usinés sans précautions spéciales (sauf cependant pour la section droite qui est usinée au 1/10e de millimètre).

La mesure se fait avec un échantillon relativement léger. La précision actuelle de la mesure est de $\pm$ 0,1 partie par million de bore (écart standard). Les fluctuations de phase sont du même ordre que celles des amplitudes. La durée d'une mesure est de l'ordre d'une demi-heure par échantillon.

Remercîments. — Nous remercions vivement M. L. Kowarski pour les fructueux conseils qu'il nous a donnés au cours de ce travail.

Les manipulations ont été faites avec le concours de MM. Boyer, Guérange et Tenot, Agents techniques.

Manuscrit reçu le 27 janvier 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Weinberg A. M. et Schweinler H. C. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 8, 851.
[2] Langsdorf A. jr. — *J. Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1948, **23**, 3, 20.
[3] Hoover et al. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 8, 864.
[4] Colmer F. C. et Littler D. I. — *Proceed. Phys. Soc. A* (G. B.), 1950, **63**, 10, n° 370 A, 1175.
[5] Raievski V. et Yvon J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **231**, 345.

NOUVELLE FAMILLE DE SOLUTIONS APPROCHÉES POUR CERTAINES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER NON SÉPARABLES. APPLICATION A L'ÉTAT FONDAMENTAL DE L'HÉLIUM

Par P. PLUVINAGE.
Faculté des Sciences de Strasbourg.

Sommaire. — Un mode de formation de solutions approximatives de l'équation de Schrödinger des atomes à deux électrons est exploité systématiquement. Il mène à des fonctions d'onde pourvues de propriétés qui les rapprochent beaucoup de la solution rigoureuse. En les prenant comme fonctions d'essai dans un calcul de variations on détermine la valeur propre de l'état fondamental de l'hélium à 1,3 pour 1000 près et le potentiel d'ionisation à 4,5 pour 1000 près. L'intérêt de la méthode est qu'elle semble bien s'appliquer quand la théorie ordinaire des perturbations ne donne pas de bons résultats.

1. **Introduction**. — L'équation de Schrödinger des atomes à deux électrons est un exemple simple d'équation non séparable pour laquelle jusqu'à présent on n'a su former que des solutions approximatives. En dépit de cette difficulté, Hylleraas [1] a calculé l'énergie de l'état fondamental avec une précision qu'il n'est pas question de dépasser. Le but du présent travail n'est pas de refaire un calcul de valeurs propres avec des fonctions d'onde contenant un grand nombre de paramètres numériques, mais de se rapprocher davantage de la solution rigoureuse à l'aide de fonctions contenant très peu de constantes arbitraires. On imposera à ces fonctions des caractéristiques mathématiques précises qu'elles partagent selon toute vraisemblance avec la solution rigoureuse. Ce faisant on rencontre un certain nombre d'idées physiques simples qui trouvent ainsi une justification. De plus, l'intérêt de la méthode suivie n'est pas limité au cas particulier des atomes à deux électrons. On établira des formules générales qui peuvent rendre des services dans d'autres questions.

Une fois les fonctions d'onde approximatives formées dans le cas particulier de l'hélium, elles sont contrôlées par le calcul du potentiel d'ionisation. Avec deux paramètres numériques, mais au prix d'une intégration laborieuse, on dépasse nettement la précision atteinte par Hylleraas en deuxième approximation.

2. **Notations**. — Les deux électrons sont indiqués par les indices 1 et 2 :

Δ_1 et Δ_2, opérateurs de Laplace

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2;$$

r_1 et r_2, distances au noyau;
r_{12}, distance mutuelle;
r, deux fois la distance du noyau au centre de gravité des électrons;
γ, angle des vecteurs r_1 et r_2;
p, $\cos\gamma$;
ω, angle des vecteurs r et r_{12};
q, $\cos\omega$;
Z, numéro atomique. Pour l'hélium $Z = 2$.

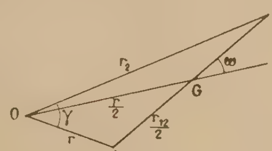


Fig. 1.

Les unités atomiques de Hartree [2] sont systématiquement utilisées. L'équation de Schrödinger étudiée s'écrit

$$H\psi = E\psi, \tag{1}$$

avec

$$H = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}}. \tag{2}$$

Pour l'état fondamental et les états S, ψ n'est fonction que de trois variables définissant le triangle de position.

3. **Approximation au voisinage des points singuliers**. — Dans un travail antérieur [3], une fonction approchée φ a été formée en remplaçant (1) par une équation résoluble voisine, comme dans la méthode de perturbation

$$H_1\varphi = E_1\varphi. \tag{3}$$

Mais, à la différence de la méthode habituelle, on conservait intégralement l'énergie potentielle dans H_1 et l'on choisissait H_1 de façon que (3) soit séparable quand on utilise les variables r_1, r_2, r_{12}

$$H_1 = -\frac{1}{2}\left(\partial^2_{r_1} + \frac{2}{r_1}\partial_{r_1} + \partial^2_{r_2} + \frac{2}{r_2}\partial_{r_2} + 2\partial^2_{r_{12}} + \frac{4}{r_{12}}\partial_{r_{12}}\right) - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}}. \tag{4}$$

La fonction φ la plus simple satisfaisant à (3) est

$$\varphi = u_k(r_{12}) \exp - Z(r_1 + r_2). \qquad (5)$$

u (r_{12}) est la fonction d'onde qui intervient dans les problèmes de chocs et qui satisfait à

$$-u'' - \frac{2}{r_{12}} u' + \frac{1}{r_{12}} u = k^2 u. \qquad (6)$$

Le spectre de cette équation est continu. Celui de (3) l'est donc aussi, ce qui constitue une différence très sensible avec la méthode de perturbation. Mais cette circonstance est propice pour un calcul de variation. En cherchant le minimum de la valeur approchée de l'énergie

$$\frac{\int \varphi H \varphi \, d\tau}{\int \varphi^2 \, d\tau},$$

on trouve — 2,878 au lieu de la valeur expérimentale — 2,9036. D'habitude on tient compte en première approximation de la répulsion des électrons en faisant intervenir un paramètre d'écran et l'on obtient — 2,848. Il est donc plus avantageux d'utiliser une fonction d'onde de choc. La raison de cette amélioration a été indiquée dans le Mémoire [3]. La fonction approchée (5) donne une densité d'énergie $\varphi H \varphi$ finie même au voisinage des points singuliers $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_{12} = 0$. Il est très vraisemblable qu'elle s'y comporte comme la solution rigoureuse ψ. A partir de cette remarque, il est possible de systématiser le procédé précédent.

4. **Equations de Schrödinger semi séparables.** — J'appellerai équation semi séparable une équation de la forme (¹)

$$\Delta\psi + 2(E - V_1 - V_2)\psi = 0 \qquad (7)$$

quand les équations

$$\Delta\psi_1 + 2(E_1 - V_1)\psi_1 = 0, \qquad (8)$$

$$\Delta\psi_2 + 2(E_2 - V_2)\psi_2 = 0. \qquad (9)$$

sont toutes deux séparables et, par suite, rigoureusement solubles. L'équation (1) est de cette forme avec

$$V_1 = -\frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2}, \qquad V_2 = \frac{1}{r_{12}}.$$

Pour le montrer, il suffit de choisir pour variables d'abord r_1, r_2, p, puis r_{12}, r, q. (8) et (9) deviennent

$$\Big[\partial^2_{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\partial_{r_1} + \partial^2_{r_2^2} + \frac{2}{r_2}\partial_{r_2} + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\partial_p(1-p^2)\partial_p\Big]\psi_1 + 2\left(E_1 + \frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2}\right)\psi_1 = 0, \qquad (10)$$

$$\Big[\partial^2_{r_{12}^2} + \frac{2}{r_{12}}\partial_{r_{12}} + \partial^2_{r^2} + \frac{2}{r}\partial_r + \left(\frac{1}{r_{12}^2} + \frac{1}{r^2}\right)\partial_q(1-q^2)\partial_q\Big]\psi_2 + \left(E_2 - \frac{1}{r_{12}}\right)\psi_2 = 0. \qquad (11)$$

Au voisinage des points singuliers de V_1 et V_2, ψ doit se comporter comme ψ_1 et ψ_2. Une étude mathématique précise serait peut-être ici fructueuse. En tout cas, l'approximation de ψ par le produit $\psi_1\psi_2$ est la façon la plus simple d'obtenir une bonne allure quand la fonction potentielle est singulière. La fonction u qui figure dans (5) est solution de (11); de même, $\exp - Z(r_1 + r_2)$ est solution de (10), mais les possibilités du procédé sont loin d'être épuisées à cause de la forte dégénérescence du problème (11) qui va permettre de généraliser la forme de ψ_2. Avant d'examiner le cas particulier de l'hélium, il est utile de faire une théorie générale.

Supposons que le spectre de l'équation (9) soit continu. ψ_2 dépend d'un ou plusieurs paramètres numériques. Proposons-nous de les ajuster par la méthode de variation. Nous devons former $\int \varphi^* H \varphi \, d\tau$, où $\varphi = \psi_1\psi_2$.

φ^* imaginaire conjuguée de φ, intervient dans le cas général où φ est complexe

$$H\varphi = -\frac{1}{2}\Delta\psi_1\psi_2 + (V_1 + V^2)\psi_1\psi_2.$$

Appliquons l'identité

$$\Delta\psi_1\psi_1 = \psi_2\Delta\psi_1 + 2\vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2 + \psi_1\Delta\psi_2.$$

En tenant compte de (8) et (9), il vient

$$H\varphi = (E_1 + E_2)\varphi - \vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2.$$

L'expression à rendre minimum s'écrit

$$E' = E_1 + E_2 - \frac{1}{N[\varphi]}\int \psi_1^* \psi_2^* \vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2 \, d\tau \qquad (12)$$

en désignant par $N[\varphi]$ l'intégrale de normation $\int \varphi^* \varphi \, d\tau$. La fonction φ est solution rigoureuse dans le cas exceptionnel où

$$\vec{\nabla}\psi_1 . \vec{\nabla}\psi_2 = \lambda\psi_1\psi_2. \qquad (13)$$

La valeur propre est alors $E_1 + E_2 - \lambda$. Dans les équations séparables ordinaires ψ_1 et ψ_2 dépendent de variables différentes et la constante λ est nulle. Mais il est sans doute possible de trouver des exemples de résolution rigoureuse avec une constante λ non nulle.

Remarquons que la méthode ne préjuge pas des ordres de grandeur respectifs de V_1 et V_2. Au contraire de la méthode de perturbation, elle s'applique même si V_2 n'est pas petit devant V_1.

5. **Généralisation.** — Dans le cas des systèmes à plusieurs particules, la fonction potentielle est de la forme

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

(¹) Les indices 1 et 2 ne se rapportent plus nécessairement à deux électrons.

On peut aussi rencontrer des fonctions V développables en série de fonctions. Dans ces deux cas, le procédé d'approximation est encore applicable en principe. L'équation de Schrödinger s'écrit

$$\Delta\psi + 2\left(E - \sum_{i=1}^{n} V_i\right)\psi = 0. \tag{14}$$

Nous supposons solubles les équations partielles

$$\Delta\psi_i + 2(E_i - V_i)\psi_i = 0. \tag{15}$$

La solution approchée est

$$\varphi = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i$$

et l'on a

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \psi_j \,\Delta\psi_i + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \vec{\nabla}\psi_i . \vec{\nabla}\psi_j \prod_{k\neq i,j} \psi_k.$$

En tenant compte de (15), on détermine

$$E' = \sum_{i=1}^{n} E_i - \frac{1}{N[\varphi]} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \int \prod_{k\neq i,j} \psi_k^* \psi_k \psi_i^* \psi_j^* \vec{\nabla}\psi_i . \vec{\nabla}\psi_j \, d\tau. \tag{16}$$

Il reste à ajuster les paramètres figurant dans (16), de façon que E' soit minimum. La solution est rigoureuse dans le cas exceptionnel où

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \vec{\nabla}\psi_i . \vec{\nabla}\psi_j \prod_{k\neq i,j} \psi_k = \lambda \prod_{i=1}^{n} \psi_i.$$

La valeur propre est alors $\sum_{i=1}^{n} E_i - \lambda$.

6. **Fonctions d'onde approchées pour l'hélium.** — Comme il s'agit ici de l'état fondamental, le choix le plus naturel pour ψ_i satisfaisant à (10) est $\exp - Z(r_1 + r_2)$. Pour ψ_2 on peut prendre la solution générale d'un problème de choc traité en coordonnées sphériques. Mais nous allons voir qu'on obtient de bons résultats en se bornant aux deux variables r_{12} et r. La méthode de séparation nous redonne $u_k(r_{12})$ pour la partie qui dépend de r_{12}. Pour la partie qui dépend de r, nous retrouvons l'équation de la particule libre en coordonnées sphériques, avec sa solution

$$\frac{1}{2\lambda r}(e^{\lambda r} - e^{-\lambda r}) = \frac{\operatorname{sh}\lambda r}{\lambda r}.$$

Tandis que dans le problème physique de la particule libre il fallait imposer à cette fonction d'être finie à l'infini, donc à λ d'être imaginaire, cette exigence n'a plus ici de raison d'être. En effet, la fonction $\varphi = \psi_1 \psi_2$ reste normable même si λ est réel. Il faut cependant que λ soit inférieur à Z. Les valeurs propres E_1 et E_2 sont

$$E_1 = -Z^2, \qquad E_2 = -\lambda^2 + k^2$$

et la famille des fonctions approchées renferme deux paramètres numériques.

Ces fonctions ont pour expression

$$\varphi = \exp - Z(r_1 + r_2)\frac{\operatorname{sh}\lambda r}{\lambda r} u_k(r_{12}). \tag{17}$$

Cette forme représente une amélioration sur (5) pour deux raisons :

a. La solution rigoureuse ψ pour l'état fondamental ne doit pas présenter de surface nodale. Or $u_k(r_{12})$ a une infinité de zéros. Mais on peut superposer des solutions approchées (17) appartenant toutes à la même valeur propre $-\lambda + k^2$ fabriquant ainsi un paquet d'ondes sans surface nodale. Cette latitude ne sera pas cependant exploitée ici. On se contentera d'une seule paire de valeurs de λ et k et le résultat montrera que la question des zéros est secondaire.

b. Quand un électron est très loin du noyau et l'autre très près on s'attend à un comportement de la fonction analogue à celui de la fonction d'onde d'un problème hydrogénoïde avec un numéro atomique $Z - \sigma$. C'est l'idée d'écran. Sur la forme (5) on ne voit rien de tel. Au contraire, dans les conditions énoncées, la fonction (17) se comporte comme $\exp - (Z - \lambda)\, r_1$ multipliée par un facteur lentement variable.

7. **Calcul de l'énergie.** — ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions réelles. On peut donc transformer l'intégrale E' donnée par (12) de la manière suivante :

$$E' = -Z^2 - \lambda^2 + k^2 + \frac{1}{N[\varphi]}\,\frac{1}{4}\int \vec{\nabla}\psi_1^2 . \vec{\nabla}\psi_2^2 \, d\tau.$$

Pour variables d'intégration, il est commode de prendre celles d'Hylleraas déjà utilisées dans le travail [3]

$$r_1 + r_2 = s, \qquad r_1 - r_2 = t, \qquad r_{12}.$$

En fonction de ces variables, r s'exprime par

$$r^2 = s^2 + t^2 - r_{12}^2.$$

Seuls les carrés des fonctions interviennent dans le calcul. Posons

$$v(r_{12}) = u_k^2(r_{12}),$$
$$w(r) = \frac{\operatorname{sh}^2\lambda r}{\lambda^2 r^2},$$
$$2Z = a.$$

En faisant le changement de coordonnées, on trouve

$$\vec{\nabla}\psi_1^2 . \vec{\nabla}\psi_2^2 = -\frac{2as}{s^2 - t^2}\left(\frac{s^2 - r_{12}^2}{r} w' v + \frac{r_{12}^2 - t^2}{r_{12}} w v'\right) \exp - as.$$

Le calcul de E' exige celui des expressions

$$L = \pi^2 a \int_0^\infty e^{-as} s\,ds \int_0^s (s^2 - r_{12}^2) r_{12} v\,dr_{12} \int_0^{r_{12}} \frac{w'}{r}\,dt,$$

$$M = \pi^2 a \int_0^\infty e^{-as} s\,ds \int_0^s v'(r_{12})\,dr_{12} \int_0^{r_{12}} (r_{12}^2 - t^2) w\,dt,$$

$$N = 2\pi^2 \int_0^\infty e^{-as}\,ds \int_0^s v r_{12}\,dr_{12} \int_0^{r_{12}} (s^2 - t^2) w\,dt.$$

On aura

$$E' = -Z^2 - \lambda^2 + k^2 + \frac{L+M}{N}. \qquad (18)$$

Sans reproduire les détails du calcul, indiquons-en la marche :

a. w et $\frac{w'}{r}$ sont développées en série et l'on sépare ainsi les termes d'ordre successifs en λ^2

$$w(r) = 1 + \frac{r^2}{3}\lambda^2 + \frac{2r^4}{45}\lambda^4 + \frac{r^6}{315}\lambda^6 + \ldots,$$

$$\frac{w'}{r} = \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{8r^2}{45}\lambda^4 + \frac{2r^4}{105}\lambda^6.$$

b. La première intégration est faite sur t, ce qui ramène à des termes de la forme

$$\int_0^\infty e^{-as} s^n\,ds \int_0^s v(r_{12}) r_{12}^p\,dr_{12}$$

qui sont immédiatement transformés en intégrales simples

$$\int_0^\infty e^{-as} \left(\frac{s^n}{a} + \frac{n s^{n-1}}{a^2} + \ldots + \frac{n!}{a^{n+1}}\right) s^p v(s)\,ds.$$

Dans M figure $v'(s)$. On repasse à $v(s)$ par la transformation

$$\int_0^\infty e^{-as} s^n v'(s)\,ds = \int_0^\infty \left(\frac{s^n}{a} - n s^{n-1}\right) e^{-as} v(s)\,ds.$$

c. Les différents termes en λ^{2n} sont des combinaisons linéaires des intégrales

$$I_n = \int_0^\infty e^{-as} s^n v(s)\,ds.$$

Pour calculer I_n on profite des propriétés de $v(s)$ indiquées dans le travail [3]. v satisfait à l'équation différentielle

$$s^2 v''' + 6 s v'' + 2(3 - 2s + 2k^2 s^2) v' - 2(3 - 4k^2 s) v = 0.$$

En multipliant par e^{-as} et appliquant les propriétés de la transformation de Laplace, on trouve la relation de récurrence

$$(a^3 + 4k^2 a) I_{n+2} - (3na^2 + 4nk^2 + 4a) I_{n+1} + [3n(n-1)a + 4n - 2] I_n - n(n-1)(n-2) I_{n-1} = 0.$$

Sauf pour $n = 0$, auquel cas

$$(a^3 + 4k^2 a) I_2 - 4a I_1 - 2 I_0 - 2 = 0.$$

Il suffit de calculer I_0 et I_1 en utilisant le développement en série de $v(s)$, pour avoir, grâce à ces relations, les intégrales d'ordres successifs.

8. **Résultats.** — E' est une fonction de λ^2 et de k^2 dont on connaît déjà le minimum pour $\lambda^2 = 0$. En effet, ce cas est celui de la fonction (5) déjà traité dans le travail [3]. Il est obtenu pour $k^2 = 0{,}16$ et vaut $-2{,}878$. J'ai calculé E' en fonction de λ^2 pour $k^2 = 0{,}1$ et $k^2 = 0{,}2$ qui encadrent la valeur précédente.

$E'(\lambda^2;\ 0{,}1)$ est minimum pour $\lambda^2 = \frac{1}{3}$, de même que $E'(\lambda^2;\ 0{,}2)$. Le minimum a à peu près la même valeur dans les deux cas : $-2{,}899$. En interpolant, on en conclut que la fonction

$$\varphi = \exp - 2(r_1 + r_2) \frac{\operatorname{sh} 0{,}58 r}{0{,}58 r} u_k(r_{12}), \qquad \text{avec} \quad k = 0{,}40$$

donne le minimum d'énergie

$$E' = -2{,}899_5.$$

La valeur expérimentale étant $-2{,}9036$, la concordance est de l'ordre du millième en valeur relative. L'intervention de la fonction de r a fait gagner les 5/6ᵉ de la différence entre la première approximation par la fonction (5) et la valeur expérimentale. Hylleraas a obtenu une approximation à peu près équivalente en se servant de la fonction à trois paramètres

$$\exp - k(r_1 + r_2) \operatorname{ch} c(r_1 - r_2) \exp c_1 r_{12}.$$

Pour calculer l'énergie d'ionisation, il faut retrancher l'énergie de l'état fondamental de l'hélium ionisé. En unités atomiques

$$E'_i = +0{,}899_5$$

Soit 24,47 eV au lieu de 24,58 expérimentalement.

A titre de comparaison, indiquons que la meilleure fonction à deux paramètres numériques utilisée jusqu'ici donnait 24,19 eV (Hylleraas). La conclusion de cette confrontation avec l'expérience et avec les autres méthodes est qu'en se montrant assez sévère sur le choix des fonctions d'onde et notamment en les assujettissant à bien se comporter au voisinage des points singuliers, on fait un pas appréciable vers la solution rigoureuse.

Manuscrit reçu le 21 avril 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Hylleraas E. — *Z. Physik*, 1929, **54**, 347.
[2] Bethe H. — *Handbuch der Physik*, 1924, **1**, 324.
[3] Pluvinage P. — *Ann. de Physique*, 1950, **5**, 145.

THÉORÈME SUR LES INVARIANTS FORMÉS DE QUATRE FONCTIONS D'ONDE DE DIRAC. APPLICATION : SECTION EFFICACE DE DIFFUSION NUCLÉON-NUCLÉON

Par Louis MICHEL [1].

Sommaire. — Il est bien connu qu'avec quatre fonctions d'ondes ψ de Dirac, prises dans un ordre déterminé, on peut former cinq scalaires linéairement indépendants; on peut aussi former huit vecteurs, neuf tenseurs antisymétriques de rang deux, huit pseudo-vecteurs et cinq pseudo-scalaires. En permutant les fonctions ψ d'un de ces invariants, on obtient un nouvel invariant qui est une combinaison linéaire des anciens (de même nature). Ce théorème peut être très utile pour effectuer des calculs, par exemple : tous les éléments de la matrice S d'un phénomène où n'interviennent que quatre fermions réels contiennent linéairement les invariants considérés et les forces d'échange réalisent des permutations des ψ; la section efficace de diffusion nucléon-nucléon est calculée à titre d'exemple. Le théorème est étendu aux 35 scalaires et 35 pseudo-scalaires formés avec six fonctions ψ distinctes.

1. Invariants que l'on peut former avec deux fonctions d'onde de Dirac [2].

1.1. **Notations.** — Les coordonnées sont x_1, x_2 x_3, $x_4 = ct$ réel, $c = h = 1$; Σ est généralement omis sur les indices muets; les indices spinoriels sont généralement sous-entendus; la forme quadratique fondamentale est

$$g^{ij} = \eta_i \delta_{ij}, \quad \text{avec} \quad \eta_i = 1 - 2\delta_{i4} \tag{1}$$

(c'est-à-dire $\eta_i = 1, 1, 1, -1$).

On se limite aux transformations de Lorentz ne changeant pas le sens du temps; elles forment un groupe isomorphe à celui des transformations orthogonales (de déterminant ± 1) d'un espace euclidien.

Dans la transformation

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2}$$

les composantes covariantes d'un vecteur se transformant ainsi :

$$V'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}, \tag{3}$$

les composantes contravariantes se transforment ainsi :

$$V_{\nu} = a^{\mu}{}_{\nu} V'_{\mu}, \tag{4}$$

on a

$$V^{\mu} = \eta_{\mu} V_{\mu}, \qquad V_{\mu} = \eta_{\mu} V^{\mu}, \tag{5}$$

les quatre matrices γ^{μ} sont définies par

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \equiv [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2\,\delta_{\mu\nu}. \tag{6}$$

On peut écrire l'équation de Dirac d'un champs de fermions sans interactions

$$(-i\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\square_{\mu} + \varkappa)\psi = 0, \tag{7}$$

en posant

$$\square_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad \varkappa = \text{masse au repos}, \tag{8}$$

les symboles utilisés pour les matrices sont : *, imaginaire conjugué; $^{+}$, hermitique; $\tilde{}$, transposé,

ψ a un indice spinoriel, donc quatre composantes, aussi il est tentant de le considérer comme une matrice à quatre lignes et une colonne. Cependant, cela est à déconseiller, car on ne peut appliquer à ces matrices ψ les règles ordinaires du calcul matriciel qui est établi pour des matrices dont les éléments sont des nombres complexes c; ici les éléments des ψ sont des produits de nombres c (qui peuvent être considérés comme matrice à une ligne, une colonne) et de nombres q (éléments d'un anneau non commutatif et représentable par des matrices). Donc, on définira

$$\psi^{*} \equiv \psi^{+} = c^{*} q^{+} \equiv c^{+} q \equiv q^{+} c^{+}.$$

On pose

$$\psi^{\kappa} = \psi \quad \text{si} \quad \kappa = -1, \qquad = \psi^{*} \quad \text{si} \quad \kappa = +1. \tag{9}$$

On écrit

$$\begin{aligned} F\psi &= F_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\nu} F_{\mu\nu}, \\ \psi F &= F_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\mu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \qquad \text{donc} \quad \psi F = \tilde{F}\psi. \tag{10}$$

1.2. **Les cinq invariants.** — Pauli a étudié la variance des ψ pour les transformations de Lorentz (2) [*voir* Pauli (1936), corrigé par Racah (1937) et aussi Pauli (1941)]. Il a démontré que pour de telles transformations on a

$$\psi' = \Lambda\psi \tag{11}$$

Λ étant une matrice régulière satisfaisant à

$$\Lambda^{-1}\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Lambda = a^{\mu}{}_{\nu}\chi_{\nu}\gamma^{\mu} \qquad (\text{dét. } \Lambda = 1), \tag{12}$$

Sans restreindre le formalisme, il est très intéressant de prendre une représentation particulière des matrices γ qui simplifie beaucoup l'écriture. Cette représentation, proposée par Majorana (1937) est définie par

$$\gamma^{\mu+} = \gamma^{\mu} = \eta_{\mu}\gamma^{\mu*} = \eta_{\mu}\tilde{\gamma}^{\mu}. \tag{13}$$

Aussi, grâce à la convention d'écriture (9), en partant des propriétés suivantes :

[1] Du Laboratoire Central des Poudres, en stage à l'Université de Manchester.

[2] Tous les résultats de ce paragraphe sont connus. Ils sont rassemblés ici afin de préciser les notations, ce qui est nécessaire pour utiliser les paragraphes 2 et 3.

ψ^{κ} est solution de l'équation de Dirac (7) et se transforme suivant

$$\psi'^{\kappa} = \Lambda \psi^{\kappa}, \tag{14}$$

$\bar{\psi}^{\kappa} = \psi^{\kappa}\gamma^4$ est solution de l'équation adjointe de (7) et se transforme suivant

$$\bar{\psi}'^{\kappa} = \psi^{\kappa}\Lambda^{-1};$$

on déduit immédiatement (³) que les expressions

$$X^Q = \chi_Q \bar{\psi}_1^{\kappa_1} \gamma^Q \psi_2^{\kappa_2}, \tag{15}$$

construites à partir de deux fonctions d'onde de Dirac sont *des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre Q* ou encore «des éléments d'algèbre extérieure d'ordre Q» ($Q = 0$ scalaire, $Q = 1$ vecteur), χ_Q et γ^Q étant des notations abrégées pour $\chi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ et $\gamma(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ avec Q indices et définis ainsi $\gamma_0 = 1$, $\chi_0 = 1$

$$\gamma^{(\lambda, \mu, \nu, \ldots)} = \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\ldots$$

si les indices $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont tous différents

$$\gamma^{(\lambda, \mu, \nu, \ldots)} = 0$$

dans le cas contraire,

les χ_μ sont des racines 4e de l'unité définies au signe près par

$$(\chi_Q \gamma^4 \gamma^Q)^+ = \chi_Q \gamma^4 \gamma^Q \tag{16}$$

(convention généralement adoptée par tous les auteurs).

Ici, leur signe sera choisi ainsi (toutes les formules de la 3e partie sont indépendantes de ce choix) :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } Q = 0, & \chi_0 & = 1; \\ \text{» } Q = 1, & \chi_\lambda & = i,\ i,\ i,\ 1 \\ & & \text{[même définition qu'en (8)];} \\ \text{» } Q = 2, & \chi_{\mu\nu} & = i\chi_\mu\chi_\nu; \\ \text{» } Q = 3, & \chi_{\mu\nu\rho} & = i\chi_\mu\chi_\nu\chi_\rho = -\dfrac{1}{\chi_\lambda} = -\eta_\lambda\chi_\lambda \\ & & (\lambda, \mu, \nu, \rho \text{ tous différents}); \\ \text{» } Q = 4, & \chi_{\lambda\mu\nu\rho} & = -\chi_\lambda\chi_\mu\chi_\nu\chi_\rho = i. \end{array}\right\} \tag{17}$$

On définit η_Q tel que

$$\left.\begin{array}{l} \eta_0 = 1, \quad \eta_\lambda = 1 - 2\delta_{4\lambda} \quad (\text{comme en } 1), \\ \eta_{\lambda, \mu, \ldots} = \eta_\lambda \eta_\mu, \ldots, \end{array}\right\} \tag{18}$$

on a [*voir* (1) et (6)]

$$\eta_\lambda \chi_\lambda^2 = -1 \quad (\text{sans sommation}), \tag{19}$$

indépendant de λ et de (17) et (18), on déduit immédiatement

$$\eta_Q \chi_Q^2 = -\theta_Q \quad (\text{indépendant des indices } \lambda, \mu, \ldots) \tag{20}$$

avec

$$\left.\begin{array}{lccccc} \theta_Q = & -1, & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \text{pour } Q = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{array}\right\} \tag{21}$$

On désignera dans la suite les cinq X^Q séparément par

$$S, \quad V^\lambda, \quad X^{\lambda\mu}, \quad Y^{\lambda\mu\nu}, \quad Z^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

1.3. **La conjugaison de charge** (⁴). — De (13), grâce à (16) et (18), on a

$$\gamma^{Q*} = \gamma_Q \eta_Q \tag{22}$$

et notant que $\left(\chi_Q^* = \dfrac{1}{\chi_Q}\right)$

$$(\chi_Q \gamma^Q)^* = -\theta_Q \chi_Q \gamma^Q. \tag{23}$$

Les équations (6) et (1) donnent encore

$$\gamma^\mu \gamma^4 = \eta_\mu \gamma^4 \gamma^\mu. \tag{24}$$

qui, grâce à (18), s'étend à

$$\gamma^Q \gamma^4 = \eta_Q \gamma^4 \gamma^Q. \tag{25}$$

La variance de ψ est indépendante de l'interaction de ψ avec d'autres champs, et tous les résultats de 1.2 sont encore valables pour un champ ψ en interaction avec des champs de bosons représentés, eux ou leurs dérivées, par la fonction Φ^Q réelle et dont la variance est celle d'un tenseur complètement antisymétrique d'ordre Q [par exemple, Kemmer (1937)].

Soit f_Q la constante de couplage (« la charge » du fermion) entre ψ et Φ^Q; ψ est maintenant solution de

$$(-i\chi_\mu\gamma^\mu\Box_\mu + \varkappa + f_Q\Phi^Q\gamma^Q)\psi = 0, \tag{26}$$

qui peut se transformer, grâce à (16), en

$$\psi^*\gamma^4\left(i\chi_\mu\gamma^\mu\overleftarrow{\Box}_\mu + \varkappa + f_Q^*\Phi^Q\chi_Q\gamma^Q\right) = 0 \tag{27}$$

($\overleftarrow{\Box}_\mu$ au lieu de $\Box_\mu$ pour rappeler que cet opérateur s'applique à gauche à ψ). On voit donc qu'avec

$$f_Q^* = f_Q \quad (\text{si les charges sont réelles}), \tag{28}$$

$\psi^*\gamma^4$ est encore, comme en 1.2, équation (14), solution de l'équation adjointe de Dirac.

Mais, par contre, en prenant l'imaginaire conjuguée de (26) on a, grâce à (23),

$$(-i\chi_\mu\gamma^\mu\Box_\mu + \varkappa - \theta_Q f_Q \Phi^Q \chi_Q \gamma^Q)\psi^* = 0, \tag{29}$$

ψ^* n'est pas solution de la même équation que ψ car f_Q a été changé en $-\theta_Q f_Q$.

Dans le cas d'un couplage vectoriel ($Q = 1$) ou « tensoriel » (⁵) ($Q = 2$), la charge change de signe par conjugaison. On dit que *la particule a deux états de charge conjugués*, pour le couplage en question, et l'on peut montrer qu'il y a conservation de la charge.

Dans le cas des trois autres couplages, la charge n'est pas changée de signe, et l'on constate qu'il n'y a plus conservation de la charge.

(³) Par exemple

$$\bar{\psi}'\chi_\mu\chi_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' = \bar{\psi}\Lambda^{-1}\chi_\mu\gamma^\mu\Lambda\Lambda^{-1}\chi_\nu\gamma^\nu\Lambda\psi = a^\mu{}_\nu a^\rho{}_\sigma\chi_\rho\chi_\sigma\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi,$$

grâce à (12).

(⁴) *Voir* Kramers, 1937 et Majorana, 1937.

(⁵) Les physiciens ont l'habitude d'appeler simplement « tensoriel » le couplage pour $Q = 2$.

Si ψ est réel (cela n'est possible qu'avec la représentation de Majorana pour les matrices γ), on appellera particule de Majorana — (du nom du premier auteur qui l'ait considéré : Majorana (1937) — la particule correspondante.

Dans (26) $-i\chi_\mu\gamma^\mu \,\Box_\mu$ et $\varkappa$ sont réels; si ψ est réel, les $\chi_Q\gamma^Q$ doivent l'être aussi; or, il n'en est pas ainsi pour $Q=1$, $Q=2$. Donc : *Une particule de Majorana ne peut être couplée aux champs de bosons qu'avec des couplages $f_Q = 0$, 3 ou 4. Elle n'a aucune propriété électromagnétique* (les seuls couplages entre fermions et photons étant la charge électrique ($Q=1$) et le moment magnétique anormal ($Q=2$).

1.4. **Tenseurs polaires** ([6]). — Soit :

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = 0, \tag{30}$$

si les indices λ, μ, ν, ρ ne sont pas tous différents ;

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = 1$$

si λ, μ, ν, ρ est une permutation paire de 1, 2, 3, 4 ;

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = -1,$$

si λ, μ, ν, ρ est une permutation impaire de 1, 2, 3, 4.

En posant

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{31}$$

on a

$$\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \theta_{\lambda\mu\nu\rho} \quad (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho \text{ tous différents}) \tag{32}$$

ou bien

$$\gamma^5 = \frac{1}{4!}\theta_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho. \tag{33}$$

On définit

$$\theta^\lambda{}_{\mu\nu\rho} = \eta_\lambda\theta_{\lambda\mu\nu\rho}\ldots \qquad \text{et donc} \qquad \theta^{\lambda\mu\sigma\rho} = -\theta_{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{34}$$

À partir des tenseurs $Y^{\mu\nu\rho}$ et $Z^{\lambda\mu\nu\rho}$, on définit donc :

un pseudo-vecteur

$$A^\lambda = \frac{1}{3!}\theta^\lambda{}_{\mu\nu\rho}Y^{\mu\nu\rho}, \tag{35}$$

un pseudoscalaire :

$$P = \frac{1}{4!}\theta_{\lambda\mu\nu\rho}Z^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{36}$$

Parce qu'on a éliminé de la définition le facteur (dét. $g_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}}$, il faut le signe — (dét. $g_{\mu\nu} = -1$) dans les formules réciproques.

$$Z^{\lambda\mu\nu\rho} = -P\,\theta^{\lambda\mu\nu\rho}, \tag{37}$$

$$Y^{\mu\nu\rho} = -A^\lambda\,\theta_\lambda{}^{\mu\nu\rho}. \tag{38}$$

On peut définir de même le tenseur M polaire de $X^{\nu\rho}$

$$M^{\lambda\mu} = \frac{1}{2!}\theta^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho}X^{\nu\rho}, \qquad X^{\nu\mu} = -\frac{1}{2}M^{\lambda\mu}\theta_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho}. \tag{39}$$

([6]) Parce que la réalité des expressions a une importance en physique, la définition utilisée ici pour le tenseur polaire d'un tenseur diffère par un facteur i de celle habituellement adoptée par les mathématiciens.

Et l'on obtient les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} Y'^{\mu\nu\rho}Y''_{\mu\nu\rho} = Y'\ldots Y'' = -6A'^\lambda A''_\lambda = -6A'.A'', \\ Z'\ldots.Z'' = -24P'P''. \qquad X'\ldots X'' = -M'\ldots M''; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$X'\ldots Y'' = 2M'.A'', \qquad Y'\ldots X'' = -2A'.M''; \tag{40'}$$

$$X'\ldots Z'' = -2M'P''. \tag{40''}$$

Les physiciens ont aussi l'habitude de n'utiliser que les composantes strictes (les six composantes indépendantes) du tenseur $Q=2$. Les définitions. généralement adoptées, sont :

$$\left.\begin{aligned} T^1 = X^{23}, \qquad T^2 = X^{31}, \qquad T^3 = X^{12}, \\ T^4 = X^{14}, \qquad T^5 = X^{29}, \qquad T^6 = X^{34}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

et le « produit scalaire » utilisé est

$$T'.T'' = \sum_{i=1}^{3}T'^iT''^i - \sum_{i=4}^{6}T'^iT''^i = \frac{1}{2}X'\ldots X''. \tag{42}$$

Les cinq invariants S, V, T, A, P ont en tout 16 composantes dont la définition est rappelée ci-dessous [*voir* Michel (1950)].

Partant des 16 matrices $\gamma_A = \gamma_{(Q,\mu)}$ définies ainsi :

Notation.	$a=1$.	$a=2$.	$a=3$.	$a=4$.	$a=5$.	$a=6$.
$Q=0$	1	–	–	–	–	
$Q=1$	γ^1	γ^2	γ^3	γ^4	–	–
$Q=2$	$i\gamma^2\gamma^3$	$i\gamma^3\gamma^1$	$i\gamma^1\gamma^2$	$i\gamma^1\gamma^4$	$i\gamma^2\gamma^4$	$i\gamma^3\gamma^4$
$Q=3$	$i\gamma^2\gamma^3\gamma^4$	$i\gamma^3\gamma^1\gamma^4$	$i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	$-i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	–	–
$Q=4$	$\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$	–	–	–	–	–

(43)

On a grâce à (6) et à l'hermiticité des γ^μ

$$\gamma_A^+ = \gamma_A, \qquad \gamma_A^2 = 1. \tag{44}$$

Les cinq invariants sont

$$(Q = 0 \text{ à } 4), \qquad X^Q = \psi_1{}^{\kappa_1}F_{Q,a}\psi_2{}^{\kappa_2},$$

avec

$$F_{Qa} = \varepsilon_a\gamma^a\gamma_{Q,a}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{Qa} = 1;\ \ i,\ i,\ i,\ 1;\ \ -1,\ -1,\ -1,\ i,\ i,\ i; \\ -1,\ -1,\ -1,\ i;\ i, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

F_{Qa} a les propriétés suivantes :

$$F_{Qa}^+ = F_{Qa}, \qquad \widetilde{F}_{Qa} = \theta_Q F_{Qa} \tag{47}$$

θ_Q est défini en (21).

Si l'on n'utilise pas la représentation de Majorana, mais en se restreignant cependant à des γ^μ hermitiques, il faut utiliser une matrice C définie par

$$\gamma^{\mu *} = \eta_\mu C\gamma^\mu C^{-1}, \tag{48}$$

avec les propriétés

$$\widetilde{C} = C, \qquad CC^+ = 1. \tag{49}$$

Les cinq invariants sont alors $\psi_1{}^{\kappa_1}\mathcal{F}_{Qa}(\kappa_1, \kappa_2)\psi_2{}^{\kappa_2}$, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Qa}(\kappa_1, \kappa_2) &= F_{Qa} && \text{si } \kappa_1 = +1 \text{ et } \kappa_2 = -1, \\ &= \widetilde{C}F_{Qa}C^{-1} && \text{si } \kappa_1 = -1 \text{ et } \kappa_2 = +1, \\ &= F_{Qa}C^{-1} && \text{si } \kappa_1 = +1 \text{ et } \kappa_2 = +1, \\ &= \widetilde{C}F_{Qa} && \text{si } \kappa_1 = -1 \text{ et } \kappa_2 = -1. \end{aligned}$$

Le Tableau I donne les F_{Qa} en notation α, β ou ρ, σ Ces matrices sont reliées aux γ par les relations ($k = 1$ à 3)

$$\alpha_k = i\gamma^4\gamma^k, \qquad \beta = \gamma^4 \tag{51}$$

et réciproquement

$$\gamma^k = -i\beta\alpha_k;$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_h = -i\alpha_i\alpha_j \\ (i, j, k = \text{permutation circulaire de } 1, 2, 3)\end{array}\right\} \tag{52}$$

$$\rho_1 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad \rho_2 = -\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad \beta_3 = \beta,$$

réciproquement

$$\alpha_k = \rho_1\sigma_k;$$

On peut encore en donner une définition indépendante [7]

$$\left.\begin{array}{l}[\rho_i, \rho_j]_+ = 2\delta_{ij} = [\sigma_i, \sigma_j]_+, \qquad [\rho_i, \sigma_j]_- = 0 \\ \sigma_i\sigma_j = i\sigma_k, \qquad \rho_i\rho_j = i\rho_k \\ (i, j, k = \text{permutation circulaire de } 1, 2, 3)\end{array}\right\} \tag{54}$$

Notation.	$\alpha\beta$ $a=1$.	$a=2$.	$a=3$.	$a=4$.	$a=5$.	$a=6$.	$\rho\sigma$ $a=1$ à 3.	$a=4$ à 6.
$Q = 0$..........	β	–		–	–	–	ρ_3	–
$Q = 1$..........	α_1	α_2	α_3	1	–	–	$\rho_1\sigma_k$	1
$Q = 2$..........	$-i\beta\alpha_2\alpha_3$	$-i\beta\alpha_3\alpha_1$	$-i\beta\alpha_1\alpha_2$	$-i\beta\alpha_1$	$-i\beta\alpha_2$	$-i\beta\alpha_3$	$\rho_3\sigma_k$	$\rho_2\sigma_k$
$Q = 3$..........	$-i\alpha_2\alpha_3$	$-i\alpha_3\alpha_1$	$-i\alpha_1\alpha_2$	$-i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	–	–	σ_k	ρ_1
$Q = 4$..........	$-\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	–	–			–	ρ_2	–

Ce tableau est indépendant de la représentation choisie pour les matrices. En choisissant les représentations habituelles des ρ, σ [proposées par Dirac (1947), p. 256] on peut prendre $C = \rho_2\sigma_2$. Mais, dans tous les problèmes traités de façon covariante (où l'on n'a pas besoin par exemple de séparer petites et grandes composantes), on a avantage, pour simplifier l'écriture, à prendre la représentation de Majorana pour les matrices, sans avoir besoin évidemment de l'expliciter.

1.5. **Symétrie et antisymétrie des invariants.** — Il est toujours possible de faire *anticommuter* toutes les fonctions ψ que l'on utilise [*voir* par exemple Michel (1950)] en excluant l'absorption suivie de l'émission, ou *vice versa*, de la même particule dans le même état. On voit alors, grâce à (47) qu'en permutant $\psi_1^{\kappa_1}$ et $\psi_2^{\kappa_2}$ les cinq invariants se transforment suivant la loi

$$X^Q(1, 2) = -\theta_Q X^Q(2, 1). \tag{55}$$

2. Invariants, éléments d'algèbre extérieure formés avec quatre fonctions d'onde de Dirac.

2.1. **Énoncé du théorème.** — On trouve facilement tous les éléments d'algèbre extérieure, ${}^4E_R$ d'ordre R que l'on peut former avec deux éléments d'algèbre extérieure, ${}^2E_Q$ et ${}^2E_{Q'}$ d'ordre Q et Q', en utilisant pour cela le produit extérieur et le produit scalaire.

Si les ${}^2E_Q$ sont des invariants formés de deux fonctions d'ondes de Dirac (ils ont été étudiés au paragraphe 1) les ${}^4E_R$ sont formés de quatre fonctions de Dirac $\psi_i^{\kappa_i}$ ($i = 1$ à 4) (distinctes ou non) et ils sont d'ordre R avec $0 \leq R \leq 4$.

Avec quatre fonctions $\psi_i^{\kappa_i}$ données, un ${}^4E_R$ est fonction de l'ordre suivant lequel ont été prises les fonctions $\psi_i^{\kappa_i}$ pour le former. On notera ${}^4E_R(P)$, P étant une permutation quelconque de 1, 2, 3, 4. Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théotème. — *Tout ${}^4E_R(P')$ est une combinaison linéaire des ${}^4E_R(P)$: P et P' étant deux permutations aribtraires de* 1, 2, 3, 4.

Ce théorème est vrai pour les ${}^2E_R$ (*voir* 1.5); *voir* l'Appendice pour les $2n\,E_R$ (n entier).

En posant $P' = PP_0$ et en affectant les ${}^4E_R$ d'un nouvel indice pour les classer entre eux, le théorème s'écrit

$${}^4E_{R,i}(PP_0) = (-1)^P C_{ij}^P(R)\,{}^4E_{R,j} \tag{56}$$

$(-1)^P = \pm 1$ suivant que la permutation P est paire ou impaire. Ce facteur est pour tenir compte de l'anticommutation des ψ (*voir* 1.5). Si l'on utilise des ψ qui commutent (on peut ne pas utiliser le formalisme de seconde quantification si l'on n'a pas de particules de Majorana et si $\kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa_3 = -\kappa_4$), il suffit de supprimer le signe de (55) et le facteur $(-1)^P$ dans toute la suite.

2.2. **Le groupe $\mathcal{S}$ des permutations de quatre objets.** — On définit les permutations [même notation que Michel (1950)]

$$P_0 \equiv 1\langle 1, 2, 3, 4\rangle,$$

$$P_1 = \langle 3, 4, 1, 2\rangle, \qquad P_2 = \langle 4, 3, 2, 1\rangle,$$

$$P_3 = \langle 2, 1, 3, 4\rangle, \qquad P_4 = \langle 1, 4, 3, 2\rangle.$$

On a

$$(P = 0 \text{ à } 4), \qquad P_P^2 = 1, \tag{57}$$

P_0, P_1, P_2 paires, P_3, P_4 impaires et

$$P_2 = (P_1P_3)^2. \tag{58}$$

Il est bien connu que toute permutation P de $\mathcal{S}_4$

[7] Dans Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, un changement de signe dans la définition de σ_2 par rapport à celle généralement adoptée, donne la relation $\sigma_i\sigma_j = -i\sigma_j$.

peut s'exprimer comme produit formé à partir de deux permutations convenablement choisies : par exemple

$$P_3 \quad \text{et} \quad \pi = \langle 4, 1, 2, 3 \rangle, \qquad \text{avec} \quad \pi^2 = P_1.$$

Cependant il est plus commode de prendre ici, comme base, les permutations P_1, P_3, P_4 : en effet, en utilisant de plus (57) et (58), toutes les permutations de $\mathfrak{S}_4$ sont données, grâce à la solubilité du groupe $\mathfrak{S}_4$ par des termes du produit

$$(1 - P_3)(1 + P_4 P_3 + P_3 P_4)(1 + P_2)(1 + P_1).$$

Les C_{ij}^P de (56) peuvent être considérés comme des matrices d'indice i, j et ces matrices (pour une valeur donnée de R) *forment une représentation du groupe* $\mathfrak{S}_4$, car (56) permet facilement de montrer que si

$$P = P_a P_b \ldots P_r, \tag{60}$$

on a

$$C_{ij}^P(R) = C_{ik}^{P_a}(R)\, C_{kl}^{P_b}(R) \ldots C_{nj}^{P_r}(R). \tag{60}$$

Il suffit donc de prouver le théorème (8) pour les permutations P_1, P_3, P_4, pour qu'il soit vrai pour toute permutation P.

2.3. Démonstration du théorème pour $R = 0$. — 2.31. LES CINQ INVARIANTS ${}^4E_{(0)i}$. — On trouve qu'il n'y a que cinq ${}^4E_{(0)}$ indépendants, qui sont ici définis

$$\left.\begin{array}{llllll} {}^4E_{(0)i} = S'S'', & V'.V'', & T'.T'', & A'.A'', & P'.P'' \\ \text{pour} \quad i = \quad 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{array}\right\} \tag{61}$$

[*voir* (40) et (42)] soit, en explicitant

$$\left.\begin{array}{l} {}^4E_{0,i} = \varepsilon'_{Qa}(\psi_1^{\kappa_1} F_{Qa} \psi_2^{\kappa_2})(\psi_3^{\kappa_3} F_{Qa} \psi_4^{\kappa_4}), \\ \qquad \text{avec} \quad i = Q + 1 \end{array}\right\} \tag{62}$$

[*voir* (46)] et

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon'_{Qa} = +1 & \text{si } a = 1, 2, 3; \\ \varepsilon'_{Qa} = -1 & \text{si } a = 4, 5, 6. \end{array}\right\} \tag{63}$$

On constate que [*voir* (46) et (63)]

$$\varepsilon'_{Qa}\, \varepsilon^2_{Qa} = \theta'_Q \qquad (\text{sans sommation sur } a), \tag{64}$$

résultat qui est indépendant de a, avec

$$\begin{array}{llllll} \theta'_Q = 1, & -1, & 1, & 1, & -1; \\ Q = 0, & 1, & 2, & 3, & 4; \\ i = 1, & 2, & 3, & 4, & 5. \end{array}$$

On peut alors écrire [*voir* (46) et (14)]

$${}^4E_{0,i} = \theta'_i(\psi_1^{\kappa_1} \gamma_{i,a} \psi_2^{\kappa_2})(\psi_3^{\kappa_3} \gamma_{i,a} \psi_a^{\kappa_a}) = \theta'_i \mathcal{J}_i(1, 2, 3, 4) \tag{65}$$

2.32. LES MATRICES $C_{ij}^{P_1}(0)$ ET $C_{ij}^{P_3}(0)$. — Elles se calculent immédiatement. $C_{ij}^{P_1}(0) = S_{ij}$, car le produit scalaire [*voir* (61)] est commutatif; $C_{ij}^{P_3}(0) = \theta_i S_{ij}$, grâce à (47).

2.33. LA MATRICE $C_{ij}^{P_4}(0)$ (9). — Soit (avec A et $B = 1$ à 16) ω_{AB} défini par $\omega_{AB}\gamma_A\gamma_B = \gamma_B\gamma_A$; on a $\omega_{AB} = \omega_{AB}$ et l'on peut noter

$$\omega_{AB} = \omega_{ia,jb} \qquad (i, j = 1 \text{ à } 5);$$

on a la propriété remarquable

$$\sum_a \omega_{ia,jb} = \sum_a \omega_{jb,ia} = \omega'_{ij} \tag{69}$$

indépendant de b, avec

$$\omega'_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{70}$$

Pauli (1936) a démontré (10) que

$$\sum_{B=1}^{16} \gamma^B_{\sigma\rho}\, \gamma^B_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\, \delta_{\rho\bar\rho}\, \delta_{\sigma\bar\sigma}. \tag{71}$$

On en tire

$$\sum_{jb} \gamma^{jb}_{\sigma\rho}\, \gamma^{ia}_{\bar\rho\kappa}\, \gamma^{jb}_{\kappa\lambda}\, \gamma^{a}_{\lambda\bar\sigma} = 4\, \delta_{\sigma\lambda}\, \delta_{\rho\kappa}\, \gamma^{ia}_{\bar\rho\kappa}\, \gamma^{ia}_{\lambda\bar\sigma},$$

et, grâce à (68) et (43),

$$\sum_{jb} \omega_{ia.jb}\, \gamma^{jb}_{\rho\sigma}\, \gamma^{jb}_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\, \gamma^{ia}_{\sigma\bar\sigma}\, \gamma^{ia}_{\rho\bar\rho} \tag{72}$$

en sommant sur a [*voir* (6) et en saturant les indices σ par $\bar\psi_1^{\kappa_1}$, ρ par $\psi_2^{\kappa_2}$, $\bar\rho$ par $\psi_3^{\kappa_3}$, σ par $\psi_4^{\kappa_4}$, [*voir* (65)], on a

$$\sum_j \omega_{ij} \mathcal{J}_j(1, 2, 3, 4) = -4 \mathcal{J}_i(1, 4, 3, 2), \tag{73}$$

ou encore, en multipliant les deux membres par θ'_i ($\theta_i'^2 = 1$, $(-1)^{P_4} = -1$),

$$(-1)^{P_4} \sum_\sigma \theta'_i \omega_{ij} \theta'_j\, {}^4E_j(0) = 4\, {}^4E_i(0)(1, 4, 3, 2), \tag{74}$$

donc

$$C_{ij}^{P_4}(0) = \frac{1}{4} \theta'_i \omega_{ij} \theta'_j \tag{75}$$

(*voir* Tableau II) et le théorème est démontré pour $R = 0$.

2.4. Démonstration pour $R = 4$. — Il y a cinq ${}^4E_i(4)$ définis ainsi

[illegible] (76)

(8) La démonstration de ce théorème part d'une égalité fondamentale donnée par Pauli (1936). Celui-ci a donné trois lignes de $C_{(0)}^{P_4}$ et deux de $C_{(4)}^{P_4}$. Fierz (1937) a donné en entier la matrice $C_{(0)}^{P_4}$.

(9) *Voir* FIERZ (1937).

(10) La formule (71) est imprimée incorrectement dans le Mémoire de Pauli (des indices ont été permutés).

TABLEAU II.

R = 0

$S'.S''$; $V'.V''$; $1/2\ V'..V'' = T'.T''$; $A'.A''$; $P'.P''$

$$C^{P_1}_{R} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad C^{P_2}_{R} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \quad 4\,C^{P_3}(R) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R = 1

$S'.V''$; $V'.S''$; $V'.V''$; $V'.V''$; $M'.A''$; $A'.M''$; $A'.P''$; $P'.A''$

$$C^{P_1}_{R} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad C^{P_2}_{R} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$4\,C^{P_3}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -i & -i & 1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & i & i & 1 & -1 & i & -i \\ 3i & -3i & -1 & 1 & -i & -i & 3 & 3 \\ 3i & -3i & 1 & -1 & -i & -i & -3 & -3 \\ 3 & 3 & i & i & -1 & 1 & -3i & 3i \\ -3 & -3 & i & i & 1 & -1 & -3i & 3i \\ i & i & 1 & -1 & i & i & 1 & 1 \\ i & i & 1 & -1 & -i & i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R = 2

$S'.V''$; $V'\wedge V''$; $V'.V''$; $A''.S'$; $V'_0 V$; $M'.P'$; $V'.V'$; $A'\wedge A''$; $P'.M'$

$$C^{P_1}_{R} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad C^{P_2}_{R} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$$4\,C^{P_3}(R) = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & 1 & -i & -1 & -1 & i & -1 \\ 2i & 0 & 2i & -2i & 0 & -2i & 2i & 0 & +2i \\ -2 & -2i & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2i & -2 \\ 1 & i & -1 & 1 & i & -1 & -1 & -i & -1 \\ 4i & 0 & 0 & -4i & 0 & 4i & 0 & 0 & 4i \\ 1 & i & -1 & -1 & -i & 1 & -1 & -i & 1 \\ 2 & 2i & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2i & -2 \\ -2i & 0 & 2i & 2i & 0 & 2i & -2i & 0 & 2i \\ -1 & -i & -1 & -1 & i & 1 & -1 & i & 1 \end{bmatrix}$$

R = 3

$S'.A''$; $V'.P'$; $V''.M'$; $M'.V''$; $A'.A''$; $A'.V'$; $A'.S''$; $P'.V''$

$$C^{P_1}_{R} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad C^{P_2}_{R} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$4\,C^{P_3}(R) = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & 1 & i & -i & 1 & i \\ i & 1 & i & i & -1 & 1 & -i & 1 \\ 3 & 3i & -1 & 1 & i & i & -3 & 3i \\ 3 & -3i & 1 & -1 & i & i & 3 & 3i \\ 3i & -3 & -i & -i & -1 & 1 & -3i & -3 \\ 3i & 3 & i & -i & 1 & -1 & 3i & 3 \\ 1 & i & -1 & 1 & i & i & 1 & -i \\ -i & 1 & -i & -i & -1 & 1 & i & 1 \end{bmatrix}$$

R = 4

$S'.P''$; $V'.A''$; $1/2\ V''..M''$; $A'.V''$; $P'.S'$

$$C^{P_1}_{R} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad C^{P_2}_{R} = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \quad 4\,C^{P_3}(R) = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 & i & 1 \\ 4i & -2 & 0 & -2 & -4i \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ -4i & -2 & 0 & -2 & 4i \\ 1 & i & 1 & -i & 1 \end{bmatrix}$$

D'après cette définition, on obtient immédiatement

$$C^{P_1}(4) \quad (\textit{voir} \text{ Tableau II});$$

et en utilisant (47)

$$C^{P_3}(4) = C^{P_3}(0) = \theta_i \delta_{ij} \quad [\textit{voir}\ (67)].$$

Le calcul de $C^{P_4}(4)$ se déduit ainsi du calcul de $C^{P_4}(0)$; avant de saturer les indices comme on l'a fait pour (72), on transforme cette formule en multipliant l'indice σ par γ^5; on notera $\check{X}$ l'invariant obtenu en remplaçant γ_Q ou F_Q [*voir* (15) et (45)] par $\gamma_Q \gamma^5$ ou $F_Q \gamma^5$.

On obtient

$$\left.\begin{array}{lll} \check{S} = -iP, & \check{P} = iS, & \check{V} = -A, \\ \check{A} = -V, & \check{X} = -iM, & \check{M} = iX. \end{array}\right\} \quad (77)$$

Et la relation cherchée peut donc se déduire de (74) en remplaçant les X ayant l'indice σ par $\check{X}$, d'où $C^{P_4}(4)$ (qui est écrit dans le Tableau II),

2.5. **Démonstration pour** $R = 1$, $R = 3$ et $R = 2$. — Les huit invariants utilisés sont, pour $R = 1$:

$${}^4E_i(1) = \left\{\begin{array}{llll} S'V'', & V'S'', & V'.X'', & X'V.'', \\ M'.A'', & A'.M'', & A'P'' & P'A''. \end{array}\right\} \quad (78)$$

Pour l'étude de $C^{P_1}(1)$ on note que

$$V'.V'' = -V'.V'', \qquad M'.A'' = -A'.M''.$$

Pour l'étude de $C^{P_3}(1)$, on utilise (27).

Pour l'étude de $C^{P_4}(1)$, on part de (72), en multipliant l'indice σ par $\chi_\mu \gamma^\mu$. On obtient ainsi cinq relations, en utilisant (20) si nécessaire. De celles-ci on en déduit cinq autres en tenant compte de la commutation de P_1 et P_4, donc de C^{P_1} et C^{P_4}. L'ensemble de ces dix relations n'en formant que huit indépendantes qui sont :

$${}^4E_i(1, P_a P_0) = (-1)^{P_a} C^P_{ij}(1)\, {}^4E_j(1, P_0).$$

De la même façon que pour passer de $R = 0$ à $R = 4$, on utilise les relations (77) pour calculer les matrices $C^P(3)$ à partir de $C^P(1)$.

Pour le cas $R = 2$ on rencontre une difficulté nouvelle, Il y a neuf invariants ${}^4E_i(2)$:

$$S'X'', \quad V'_\wedge V'', \quad V'.V'', \quad X'S'',$$
$$V'_0 V'', \quad M'P'', \quad Y'.Y'', \quad A'_\wedge A'', \quad P'M'';$$

$\wedge$ indiquant le produit extérieur

$$(V'_\wedge V'')^{\mu\nu} = V'^\mu V''^\nu - V'^\nu V''^\mu,$$

o étant une convention pour

$$(X'_0 X'')^{\mu\nu} = X'^\mu{}_\lambda X''^{\lambda\nu} - X'^\nu{}_\lambda X''^{\lambda\mu}.$$

$C^{P_1}(2)$ et $C^{P_3}(2)$ se calculent facilement. Pour $C^{P_4}(2)$, on suit la même méthode que pour $R = 1$. On part de (72) et l'on multiplie l'indice σ par $\chi_\mu \chi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu$ $(\mu \neq \nu)$ on obtient ainsi cinq relations. En utilisant $P_1 P_4 = P_4 P_1$, on a cinq nouvelles relations. Mais comme pour $R = 1$, ces dix relations n'en forment que huit indépendantes, or il y a neuf invariants; cependant, il est possible de former de nouvelles relations; une qui convient [11] est fondée sur l'égalité

$$P_3 P_4 = (P_4 P_3)^2. \quad (79)$$

Et le théorème se trouve démontré pour les ${}^4E$,

2.6. **Corollaires du théorème.** — 2.61. Expressions linéaires en ${}^4E_i(R)$ invariantes pour le groupe $\mathcal{S}_4$. — Est-il possible de construire de telles expressions avec quatre champs différents de fermions (${}^4\psi_i$ distincts) ? La réponse est affirmative pour $R = 0$ [*voir* Michel (1950)].

Toute expression linéaire $h(R)$ est de la forme [12]

$$h(R) = \sum_{i\,P} \mathcal{J}_i(P)\, {}^4E_i(R). \quad (80)$$

En choisissant un ordre donné pour définir la permutation $P_0 = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{l} h(R) = \sum_i g_i\, {}^4E_i(R, P_0), \\ \text{avec} \quad g_i = \sum_{jP} \mathcal{J}_i(P)(-1)^P C^P_{ji}. \end{array}\right| \quad (81)$$

Si h est invariant pour tout P, on doit avoir

$$h(R) = \sum_i g_i\, {}^4E_i(R, P_0) = \sum_i g_i (-1)^P C^P_{ij}\, {}^4E_j(R, P_0)$$
$$= \frac{1}{24} \sum_P \sum_i g_i (-1)^P C^P_{ij}\, {}^4E_j(R, P_0).$$

[11] Les deux derniers invariants non séparés ${}^4E_{2,3}$, ${}^4E_{2,7}$ satisfont à la relation invariante par P_1 : (en notant ici ${}^4E_i(2)$ implement E_i)

$$E_3(P_4 P_0) + E_7(P_4 P_0)$$
$$= + E_1(P_0) + E_4(P_0) + E_6(P_0) + E_9(P_0),$$

d'où

$$E_3(P_3 P_4 P_0) - E_7(P_3 P_4 P_0)$$
$$- E_2(P_3 P_0) \ [illegible]$$

et en utilisant une relation déjà trouvée, cela égale

$$-iE_2(P_4 P_3 P_0) \ [illegible]$$

d'où, grâce à (79),

$$[illegible]$$

d'où

$$[illegible]$$

qui, avec la relation dont nous sommes partis, donne

$$[illegible]$$

[12] Les h fixés, n'intervenant pas ici, sont omis dans l'écriture.

La condition nécessaire (et suffisante) pour que $h(R) \neq 0$ soit invariant pour toute permutation P est donc que

$$\sum_P (-1)^p g_i C_{ij}^p = 24 g_i, \tag{82}$$

c'est-à-dire que g_i soit « vecteur propre » de la matrice (qui doit être $\neq 0$)

$$\mathcal{C} = \sum_P (-1)^p \widetilde{C}^p,$$

avec la valeur propre 24.

Pour $R = 0$, on trouve effectivement pour g_i [*voir* Michel (1950)]

$$g_2 = g_3 = 0, \qquad g_2 = -g_4 = g_5. \tag{83}$$

Cet invariant est le déterminant formé avec les quatre composantes des 4ψ; il a déjà été utilisé par Critchfield et Wigner (1941) [*voir* aussi Critchfield (1943)]. Pour les autres valeurs de R, $\mathcal{C} = 0$ et il n'y a pas de solutions. Il en est de même si l'on cherche une expression antisymétrique par rapport aux ψ (qui anticommutent) [13].

L'expression $h_0 = g_0 \,(S'S'' - A'A'' + P'P'')$ est donc la seule indépendante de l'ordre dans lequel sont placés les quatre ψ.

Si des ψ sont identiques, les ${}^{2n}E_R$ sont alors invariants par rapport aux permutations qui les commutent. On en déduit immédiatement, grâce à (55), pour les ${}^2E$ construits avec le même ψ, $V = 0 = X$ (les ψ anticommutant).

2.62. Identités quadratiques entre les ${}^2E(Q)$. — Si les ${}^4E$ sont formés à partir des mêmes ${}^2E(Q)$, (S, V, X, A, P), ils sont invariants pour les permutations P_1, P_4 et leurs produits. [Plus exactement, ils sont multipliés par $(-1)^R$].

L'invariance par rapport à P_1 diminue le nombre des ${}^4E$ indépendants (cela est dû à la commutativité du produit scalaire). Ce nombre se réduit :

pour $R =$	0,	1,	2,	3,	4
à	5,	4,	3,	4,	3

$(V_\wedge V,\ A_\wedge A,\ X_0 X$ étant $= 0)$.

L'invariance par rapport à P_4 permet de déduire d'autres relations linéaires entre les ${}^4E_i(R)$, ces relations étant des identités quadratiques entre les ${}^2E(Q)$. [Les cinq relations obtenues pour $R = 0$ et $R = 4$ ont été données par Pauli (1936), celles pour $R = 2$ par Kofink (1937), pour $R = 1$ et $R = 3$ par Kofink (1940)]. Ces relations sont :

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{pour } R = 0 \left\{ \begin{array}{l} a.\ \frac{1}{2} X..X = \text{[illegible]}\, V^2 = S^2 \text{ [illegible] } P^2, \\ b.\ \quad V^2 = -A^2, \\ c.\ \quad A^2 = S^2 + P^2; \end{array}\right. \\
\text{» } R = 1 \left\{ \begin{array}{l} d.\ \quad SV \text{ [illegible] } M.A, \\ e.\ \quad PA \text{ [illegible] } VA; \end{array}\right. \\
\text{» } R = 2 \quad f.\ SA + V.X \text{ [illegible] } MP = 0; \\
\text{» } R = 3 \left\{ \begin{array}{l} g.\ \quad S.A \text{ [illegible] } V.M, \\ h.\ \quad PV = \text{ [illegible] } X.A; \end{array}\right. \\
\text{» } R = 4 \left\{ \begin{array}{l} i.\ \quad V.A = 0, \\ j.\ \quad A..M = 4SP. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \tag{84}$$

Ces relations ne sont pas toutes indépendantes; on démontre aisément qu'elles peuvent toutes être déduites de b, c, f, i, par exemple [Kofink (1940)].

3. Applications.

3.1. Interaction phénoménologique entre quatre fermions. — La densité d'hamiltonien d'interaction est un scalaire [14]. Cette densité h la plus générale, ne faisant intervenir que les quatre ψ (et non leurs dérivées) est donc, pour une classe donnée $\pm\,\kappa$ de réactions [15]

$$h = \sum_{i,R} g_{iR}(\kappa)\,\big({}^4E_{iR}(\kappa) + {}^4E_{iR}(-\kappa)\big), \tag{85}$$

les g_{iR} réels étant des éléments d'algèbre extérieure d'ordre R.

En se limitant à l'approximation de Born (ondes planes pour représenter les particules), on peut donc déduire l'expression générale proportionnelle à la probabilité de transition $|H_T|^2$, H_T étant l'élément de l'hamiltonien $\int h\,dv$ correspondant à la transition. Celà a été fait dans une publication antérieure [Michel (1950)] dans le cas simple [16]

[13] En d'autres termes, lorsqu'on décompose les représentations $C(R)$ en représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$, on ne trouve qu'une seule fois, et pour $R = 0$, une représentation irréductible de degré 1.

[14] Ce ne peut être un pseudo-scalaire, car la « parité » ne serait pas conservée. Ce ne peut être non plus un scalaire de la forme $S_i = {}^4E(4) \times$ déterminant $\alpha^{\mu\nu}$, $\alpha^{\mu\nu}$ étant [*voir* (2)] la matrice de la transformation de Lorentz, car la valeur de S_i ne pourrait être complètement définie (avec son signe) qu'en faisant intervenir une orientation donnée pour les trièdres d'espace. Or il ne semble pas possible actuellement de définir dans l'univers une telle orientation d'après les phénomènes physiques dus à des interactions entre particules élémentaires.

[15] L'existence d'une réaction (réelle ou virtuelle) entre s champs (décrits par des $\psi^{k_s}_{s}$) distincts ou non, implique l'existence d'un couplage entre ces champs, ce qui implique l'existence d'autres réactions. L'ensemble de toutes les réactions dont l'existence est impliquée par l'existence de l'une d'entre elles est appelée « classe » [Michel (1950) *a.* et *b*] la classe est définie par $\pm\,\vec{\kappa}$ avec $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_0)$.

[16] On verra en 3.2 un exemple d'application. Un autre exemple est l'interaction « directe » entre quatre fermions. Dans ce cas, les g_0, sont des constantes de couplage (exemple : radioactivité-β). Mais l'expression la plus générale pour h (densité d'hamiltonien d'interaction) dérivable d'un lagran-

où $R = 0$ et les résultats obtenus sont rappelés ci-dessous

On notera $M_s = +1$ ou -1 suivant que la s^e particule est émise ou absorbée, $\mathfrak{N}$ le nombre d'états de spin initiaux distincts $\mathfrak{N} = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\sum M_s}$. Pour une transition permise (initialement les particules avec $M = -1$ sont présentes, les états des particules avec $M = +1$ ne sont pas occupés) et désignant par $\sum\limits_{\sigma}$ la somme sur les états distincts par le spin, on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{N}} \sum_{\sigma} |H_T|^2 \\ &= \frac{V^{-2}}{\mathfrak{N}} \sum_{ia,\, jb} g_i g_j \varepsilon'_{ia} \varepsilon'_{jb} \quad \operatorname{Tr} F_{ia} D(M_1) F_{jb} D(-M_2) \\ &\qquad \times \operatorname{Tr} F_{ia} D(M_3) F_{jb} D(-M_1), \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

avec

$$D(M_s) = \frac{\gamma^4}{2E_s}\left(\sum_{\mu} \chi_\mu \gamma^\mu k^\mu + M_s \varkappa_s\right), \qquad (87)$$

$\varkappa_s$ étant la masse du repos de la s^e particule, k_s^μ son quadrivecteur impulsion-énergie ($k^4 = -k_4 = E$); on a $k^\mu k_\mu = -\varkappa^2$.

χ_μ a été défini en (8) et F_{ia} en (46).

V est le volume de normalisation des ψ.

La formule (86) est explicitée dans le Tableau III.

L'expression $\frac{1}{V^2} \sum\limits_{\sigma} |H_T| E_1 E_2 E_3 E$ est donnée par le Tableau III, avec

$$m_s = M_s \varkappa_s.$$

La 1re colonne est le coefficient de g_1^2 dans l'expression (87), la 2e celui de g_2^2, etc. Exemple, le coefficient de g_1^2 est

$$(k_1 . k_2)(k_3 . k_4) + k_1 . k_2\, m_3 m_4 + k_3 . k_1\, m_1 m_2 + m_1 m_2 m_3 m_4.$$

Tableau III.

	g_1^2	g_2^2	g_3^2	g_4^2	g_5^2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$(k_1 . k_2)(k_3 . k_4)$	1		−2		1				–	–		–
$(k_1 . k_3)(k_2 . k_4)$	–	2	4	2		–	2		4		2	
$(k_1 . k_4)(k_2 . k_3)$	–	2	4	2	–		2	–	4		−2	
$k_1 . k_2 m_3 m_4 + k_3 . k_4 m_1 m_2$ ..	1	−2	–	2	1				–	–	–	
$k_1 . k_3 m_2 m_4 + k_2 . k_4 m_1 m_3$ ..	–	–		–		2		−6	–	−6		2
$k_1 . k_4 m_2 m_3 + k_2 . k_3 m_1 m_4$ ..	–	–	–	–		−2		−6		6		2
$m_1 m_2 m_3 m_4$	1	4	6	4	1	–					–	

3.2. **Scattering nucléon-nucléon dans les différentes théories mésiques, couplage en f, à l'approximation du second ordre en f.** — 3.21. Cas d'utilisation du tableau III. — Le Tableau III pourra être utilisé dans le cas de diffusion entre deux fermions, si l'élément correspondant de la matrice S a la forme (85) avec $R = 0$. Les g_i sont alors des fonctions des constantes d'interaction et d'invariants relativistes. Dans le cas où l'interaction entre fermions (exemple nucléons) est due à des champs intermédiaires de bosons (exemple : mésons) la méthode de Feynman, exposée par Dyson (1949) pour l'électrodynamique et étendue par Matthews (1949 *a*) pour les différentes théories mésiques, permet très facilement de construire l'élément de la matrice S correspondant à une transition donnée. Soit h_i les densités d'hamiltonien d'interaction entre les différents champs de bosons et les fermions, dans tout élément d'ordre quelconque de la matrice S les quatre fonctions ψ sont reliées entre elles par les matrices γ intervenant en k_i, par des fonctions Δ_F ou leurs dérivées et des fonctions S_F (les dernières correspondant à des fermions virtuels, les précédentes à des bosons virtuels). Seules les fonctions Δ_F n'introduisent pas de quadrivecteurs impulsion-énergie k^μ (au numérateur) lorsque l'on passe dans l'espace des k^μ et dans ce cas l'élément de la matrice S est un invariant scalaire de la forme $\Sigma g_i\, {}^4E_i(0)$. Or, seuls les éléments du 2e ordre ne font pas intervenir de fonctions S_F. Les opérateurs P de Dyson (1949) agissant sur des fonctions φ de bosons n'introduisent pas de dérivées des fonctions Δ_F que dans le cas des mésons de spin zéro ou pour le photon et [*voir* Matthews (1949 *b*)] le méson vectoriel neutre. Mais dans les autres cas de spin 1 les quadrivecteurs k introduits peuvent être éliminés grâce à certaines relations [17].

Donc, en résumé, en suivant les dénominations de Pais (1947), généralement adoptées, appelant :

f, les constantes d'interactions qui ne contiennent que la fonction f du champ de bosons;

gien, quantifiable et décrivant une interaction directe entre quatre fermions peut contenir des quadrivecteurs impulsion-énergie ou linéairement des dérivées premières des ψ; h peut encore contenir des termes de (85) où $R = 4$, les g_{4i} étant alors des constantes de couplage pseudo-scalaires.

[17] En utilisant les mêmes relations on peut démontrer que pour les couplages « en g » dans le cas des mésons de spin zéro, les k^μ introduits par les dérivées de Δ_F peuvent être éliminés, comme il est bien connu [Nelson (1941), Dyson (1948), Le Couteur et Rosenfeld (1949), Van Hove (1949)], ce qui revient à poser $\frac{2\varkappa}{\mu} g_5 + f_5 = f'_5$, $g_1 = 0$ en négligeant dans ce dernier cas la différence de masse entre protons et neutrons.

g, les constantes d'interactions qui ne contiennent que les dérivées de φ,

on peut dire que les seuls ${}^4E\,(R)$ contenus dans les éléments du second ordre de la matrice S pour l'interaction nucléon-nucléon avec les couplages en f des différentes théories mésiques sont les ${}^4E\,(0)$.

Cette conclusion est encore vraie pour les interactions électromagnétiques entre particules chargées (mais sans moment magnétique anormal, ce dernier introduisant un couplage en g). Les éléments de la matrice S du 2e ordre, pour la diffusion nucléon-nucléon, ou les hamiltoniens du 2e ordre correspondant ont été publiés pour les différentes théories mésiques scalaires, vectorielles et pseudo-scalaires par Van Hove (1949), Jean et Prentki (1950); pseudo-vectorielles par Enatsu (1950).

3.22. Les forces d'échanges. — Les matrices de spin isotopique étant des opérateurs linéaires, les parties 1 et 2 s'étendent immédiatement au cas de ψ contenant des indices de spin isotopique. Pour appliquer le tableau (87) il faut cependant développer par rapport aux fonctions ψ ordinaires. Tous les ${}^4E_i\,(0)$ ne se trouvent plus alors écrits avec la même permutation P, s'il y a échange de particules : c'est le cas d'une interaction proton-neutron par l'intermédiaire de mésons chargés (les matrices τ_1 et τ_2 sont responsables du changement de P). Cela se produit encore (indépendamment du spin isotopique) pour les particules de même nature et avec même κ, soit parce que $L_1 = L_2$: particules expérimentalement indiscernables, soit parce que $L_1 = -L_2$; $M_1 = -M_2$; par exemple, la diffusion positon-négaton, traitée par Bhabha (1937). Comme on le voit dans l'article de Bhabha, en élevant au carré l'élément de transition, puis en sommant sur les spins, on obtient des produits de traces comme en (86), mais aussi de longues traces contenant huit ψ et dont le calcul est plus fastidieux. Cela peut être évité en appliquant le théorème de la 2e partie et ramenant ainsi tous les ${}^4E\,(0)$ à la même permutation.

3.23. La diffusion nucléon-nucléon. — 3.231. *La section efficace de collision.* — Ayant la matrice $R = S - 1$, on a [Møller (1945) et (1946)]

$$\mathrm{d}Q = \frac{4\pi^2(E'_2 + \varkappa^2)^{\frac{3}{2}} E_1 E_2 E'_1 E'_2 \,|R|^2\,\mathrm{d}\Omega}{\left|\frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2\right|^{\frac{1}{2}} \,|\, E'_1 \varkappa^2 + E'_2 k'_1 . k'_2 |}, \qquad (88)$$

$\mathrm{d}\Omega$ étant l'angle solide dans la direction $\vec{k}'_2$.

On désignera les masses μ des mésons et les constantes de couplage f des différentes théories mésiques par deux indices, le premier étant, soit C pour les mésons chargés, S pour les mésons neutres de la théorie symétrique (protons et neutrons ont des charges mésiques opposées), N pour les mésons neutres (protons et neutrons ont même charge mésique); le second indice étant 1 pour les mésons scalaires, 2 pour les mésons vectoriels, 4 pour les mésons pseudo-vectoriels, 5 pour les mésons pseudo-scalaires.

La densité d'hamiltonien d'interaction la plus générale sera donc

$$h = \sum_i f_{Ci}\,\bar{\psi}^* F_i(\tau_1 + \tau_2)\psi + f_{Si}\,\bar{\psi}^* F_i \tau_3 \psi + f_{Ni}\,\bar{\psi}^* F_i \psi. \qquad (89)$$

Tous les mélanges possibles dépendent donc de 12 constantes f et 12 masses μ. Pour une théorie symétrique

$$f_N = 0, \qquad f_S = f_C, \qquad \mu_S = \mu_C.$$

3.232. *La diffusion neutron-neutron.* — Ayant sommé sur la variable d'espace (ce qui assure la conservation de la quantité de mouvement) j'appelle a^{M} la partie spinorielle d'une onde plane de ψ^{K} représentant une particule donnée (k, σ, M); en effet,

$$\psi^{\mathrm{K}} = (NV)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathrm{M}} u^{(\mathrm{M})}{}_{\mathrm{KM}}\, a^{\mathrm{M}}\, e^{\frac{-i\mathrm{M}k.x}{\hbar}} \qquad (90)$$

[*voir* Michel (1950)], où u est le « nombre q ».

On pose

$$J_i(1', 1, 2', 2) = \sum_b \varepsilon'_b(a_1, F_{ib}\,a_1)(a_2, F_{ib}\,a_2) \qquad (i = 1 \text{ à } 5).$$

et l'on obtient la matrice $R = S - 1$ pour une transition permise

$$\langle k'_1 k'_2 \,|\, R \,|\, k_1 k_2 \rangle = \frac{-i}{4\pi^2 \hbar c} \sum_i [\mathfrak{g}_i\, J_i(1', 1, 2', 2) - \mathfrak{g}'_i\, J(2', 1, 1', 2)],$$

avec

$$\mathfrak{g}_i = \frac{f^2_{S_i}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_i}} + \frac{f^2_{N_i}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_i}}$$

$$\text{pour} \quad i = 1, 2, 4,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_2 = 2^2\varkappa^2 \Bigg(& \frac{f^2_{S_4}}{[(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_4}]\mu^2_{S_4}} \\ & + \frac{f^2_{N_4}}{[(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_4}]\mu^2_{N_4}} \Bigg) \\ + \frac{f^2_{S_5}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_5}} & + \frac{f^2_{N_5}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_5}} \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

$$\mathfrak{g}_3 = 0,$$

on passe des $\mathfrak{g}_i$ aux $\mathfrak{g}'_i$ en changeant k'_1 en k'_2.

D'où, en ramenant tous les J au même ordre 1', 2', 1, 2, grâce au théorème général

$$\begin{aligned} \langle k'_1 k'_2 \,|\, R \,|\, k_1 k_2 \rangle = \frac{-i}{16\pi^2 \hbar c} [\quad & (s_1 + 4s_2 + 4s_4 - s_5) J_1 \\ & + (d_1 + 2d_2 + 2d_4 + d_5) J_2 \\ & + (-d_1 + d_5) J_3 \\ & + (s_1 + 2s_2 - 2s_4 + s_5) J_4 \\ & + (-s_1 + 4s_2 + 4s_4 + s_5) J_5] \end{aligned} \qquad (92)$$

avec

$$s_i = g_i + g'_i, \qquad d_i = g_i - g'_i.$$

Il est aisé de vérifier que cette expression est antisymétrique par rapport à 1 et 2 et aussi 1′ et 2′.

Et l'on peut, par lecture du Tableau II sommer sur les états de spin et écrire (grâce à 28) la section efficace dans le système le plus général.

3.233. *La diffusion neutron-proton.* — En appelant par exemple 1 le neutron incident, 1′ le neutron diffusé, 2 le proton incident et 2′ le proton diffusé, on obtient la même formule (92), mais les nouveaux g et g' se déduisent de ceux de la formule (91), ainsi :

pour les g_i, remplacer f_{iS}^2 par $-f_2^{iS}$ dans les g de (91);

pour les g_i, remplacer f_{iS}^2 par $2f_{iS}^2$ et μ_{iS} par μ_{iC} dans les g_i de (91) et poser $f_{iN} = 0$.

Quant à la diffusion proton-proton, elle est évidemment identique à la diffusion neutron-neutron si l'on néglige l'interaction due aux charges électriques; sinon, il suffit d'ajouter cette interaction dans g_2 et g.

3.3. **La section efficace différentielle de diffusion nucléon-nucléon dans le système du centre de gravité.** — Le choix de ce système particulier de référence permet de comparer la formule théorique avec les résultats expérimentaux; cette comparaison est en cours.

La valeur de la section efficace différentielle est explicitement donnée sous forme de tableau. L'énergie de chaque nucléon est E, sa quantité de mouvement est p, l'angle entre les quantités de mouvement d'un nucléon incident et du nucléon diffusé correspondant est θ; on définit des coefficients a_A et a'_A (l'indice A ayant les trois significations possibles : C, N, S), suivant le spin isotopique du méson (*voir* 3.23).

Valeurs de...	a_N.	a_S.	a_C.	a'_N.	a'_S.	a'_C.
Pour la diffusion n–p	1	−1	0	0	0	2
» » n–n ou p–p..	1	1	0	1	1	0

On pose $W = \frac{\varkappa^2 c^2}{p^2}$ et $w_{iA} = \frac{\mu_{iA}^2 c^2}{p^2}$; les coefficients c et c' du Tableau IV sont définis ainsi

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \sum_A \frac{a_A f_{iA}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{iA}} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2 \text{ ou } 4, \\ c_5 &= \sum_A a_A \left[\frac{\left(\frac{2\varkappa}{\mu_A}\right)^2 f_{4A}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{4A}} + \frac{f_{5A}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{4A}} \right]. \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

On passe des c_i aux c'_i en changeant a_A en a'_A et en changeant $\sin^2\frac{\theta}{2}$ en $\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Tableau IV.

	1.	cos θ.	cos² θ.	W.	W cos θ.	W².
c_1^2	1	−2	1	4	−4	4
$c_1'^2$	1	2	1	4	4	4
$c_1 \; c'_1$	1	–	1	−4	–	−4
c_2^2	10	4	2	8	8	4
$c_2'^2$	10	−4	2	8	−8	4
$c_2 \; c'_2$	16	–	–	–	–	−4
c_4^2	10	4	2	16	–	12
$c_4'^2$	10	−4	2	16	–	12
$c_4 \; c'_4$	16	–	–	16	–	12
c_5^2	1	−2	1	–	–	–
$c_5'^2$	1	2	1	–	–	–
$c_5 \; c'_5$	1	–	−1	–	–	–
$c_1 \; c_2$	–	–	–	−12	−4	−8
$c_1 \; c'_2$	2	−4	2	2	−10	4
$c'_1 \; c_2$	2	4	2	2	10	4
$c'_1 \; c'_2$	–	–	–	−12	4	−8
$c_1 \; c_4$	–	–	–	–	–	–
$c_1 \; c'_4$	−2	4	−2	−14	6	−12
$c'_1 \; c_4$	−2	−4	−2	−14	−6	−12
$c'_1 \; c'_4$	–	–	–	–	–	–
$c_1 \; c_5$	–	–	–		–	–
$c_1 \; c'_5$	−1	–	1	−2	−2	–
$c'_1 \; c_5$	−1	–	1	−2	2	–
$c'_1 \; c'_5$	–	–	–	–	–	–
$c_2 \; c_4$	12	−8	−4	8	−8	–
$c_7 \; c'_4$	16	–	–	24	8	12
$c'_2 \; c_4$	16	–	–	24	−8	12
$c'_2 \; c'_4$	12	8	−4	8	8	–
$c_2 \; c_5$	–	–	–	–	–	–
$c_2 \; c'_5$	2	4	2	2	2	–
$c'_2 \; c_5$	2	−4	2	2	−2	–
$c'_2 \; c'_5$	–	–	–	–	–	–
$c_4 \; c_5$	–	–	–	4	−4	–
$c_4 \; c'_5$	−2	−4	−2	2	2	–
$c'_4 \; c_5$	−2	4	−2	2	−2	–
$c'_4 \; c'_5$	–	–	–	4	4	–

La section efficace différentielle est

$$\mathrm{d}Q = \frac{\mathfrak{T}\,\mathrm{d}\Omega}{4(2\pi)^2(\hbar c)^2 E^2}. \qquad (94)$$

$\mathfrak{T}$ est donné par le Tableau IV qu'il faut lire ainsi : $\mathfrak{T}$ est quadratique en c et c', les coefficients de cette forme quadratique sont obtenus en multipliant 1, $\cos\theta$, $\cos^2\theta$, ..., par les nombres de la ligne du terme c, c' choisi; par exemple : pour un méson pseudoscalaire chargé seul le terme en $c_S'^2$ n'est pas nul et l'on trouve

$$\mathfrak{T} = (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, c_S'^2.$$

Pour des mésons scalaires ou pseudo-scalaires, cette section efficace a déjà été publiée par Jean

et Prentki (1950); ces sections efficaces différentielles et totales, pour le mélange mésique le plus général (y compris les couplages tensoriels omis ici) ont été calculées par C. Marty; une partie seulement de ce travail a déjà été publié : Marty (1950).

Je remercie vivement M. le professeur L. Rosenfeld pour ses conseils et l'intérêt qu'il a apporté à ce travail. Je suis très reconnaissant envers le Service des Poudres, qui m'a permis d'effectuer un long stage à l'Université de Manchester.

Appendice.

Il n'est pas possible d'étendre par récurrence le théorème aux ${}^{2n}E(R)$ avec n entier quelconque. Il est simplement possible d'énoncer que : Si le théorème est exact pour tous les ${}^{2n}E(R)$, avec $0 \leq R \leq 4$ et un n donné plus grand que 1 (il est vrai *a fortiori* pour les n inférieurs), il s'applique aussi aux ${}^{2(n+1)}E(0)$ et aux ${}^{2(n+1)}E(4)$.

En effet, considérons un ${}^{2(n+1)}E(0)$: il est composé de $n+1$ ${}^{2}E$; soit ${}^{2}E_1(Q)$ l'un d'eux, ses indices sont saturés par ceux d'un tenseur d'ordre Q, qui peut toujours être mis sous sa forme complètement antisymétrique (toute partie symétrique ne donnant aucune contribution). On peut donc écrire

$$ {}^{2(n+1)}E(0) = {}^{2}E_1(Q)\,{}^{2n}E(Q). $$

Soit $\mathfrak{N}(2n, R)$ le nombre de ${}^{2n}E(R)$ linéairement indépendants formés avec $2n\,\psi$ placés dans un ordre donné, on déduit immédiatement de ce qui précède que

$$ \mathfrak{N}(2n+2, 0) = \sum_R \mathfrak{N}(2n, R). $$

Soit P une permutation des ψ du ${}^{2(n+1)}E(0)$ considéré :

1er *cas.* — P laisse invariant ψ_1 et ψ_2 de ${}^{2}E_1(Q)$, elle transforme ${}^{2n}E(Q)$ en une combinaison linéaire de ${}^{2n}E'(Q)$ (' indiquant le nouvel ordre des ψ); elle transforme donc le ${}^{2n+2}E(0)$ considéré en une combinaison linéaire de ${}^{2n+2}E'(0) = {}^{2}E_1(Q).{}^{2n}E'(Q)$

2e *cas.* — P remplace ψ_1 et ψ_2 de ${}^{2}E_1(Q)$ par ψ_a et ψ_b de ${}^{2n}E(Q)$; on fait la permutation (élément de φ_{2n}) qui place les ψ de ${}^{2n}E$ dans leur ordre définitif à l'exception de ψ_a et ψ_b qui sont alors mis aux places définitives de ψ_1 et ψ_2. On a ainsi une combinaison linéaire de ${}^{2}E_1(Q).{}^{2n}E''(Q) = {}^{2n+2}E''(0)$. Chacun de ces derniers peut être considéré comme le produit scalaire de ${}^{2}E_\lambda(R)$ avec ${}^{2n}E_\kappa(R)$ contenant à la fois ${}^{2}E_1$ et ψ, ce qui est possible si $n > 1$, et l'on est ramené au 1er cas pour faire sur les ${}^{2n+2}E''(0)$ la permutation $(1, a)$ qui échange ψ_1 et ψ_a. On recommencera de même avec ψ_2 et ψ_b, et le théorème est encore vrai dans ce cas [18].

3e *cas.* — P remplace un des ψ de ${}^{2}E_1(Q)$ par un des ψ de ${}^{2n}E(Q)$; ce cas se traite de façon analogue au précédent après avoir, si nécessaire, fait la permutation $(1, 2)$ sur ${}^{2}E_1(Q)$.

Il est évident qu'on peut transposer tout ce qui vient d'être démontré pour les ${}^{2n+2}E(0)$ aux ${}^{2+n2}E(4)$. Il suffit, par exemple, de transformer ${}^{2}E_1$ en ${}^{2}\breve{E}_1$.

Puisque le théorème a été démontré pour $n = 2$ et qu'il y a en tout $35\,{}^{4}E$, on peut énoncer le résultat suivant :

Avec six fonctions ψ^κ de Dirac distinctes (qui commutent ou anticommutent) on peut former 35 scalaires et 35 pseudoscalaires linéairement indépendants. Tout scalaire (respectivement pseudoscalaire) formé avec les six ψ^κ placés dans un ordre donné est une combinaison linéaire de scalaires (respectivement pseudoscalaires) formés avec les mêmes ψ^κ placés dans un autre ordre.

[18] Évidemment si $n \geq 3$ on peut, remplacer ces deux dernières permutations par la seule permutation $(1, a)$, $(2, b)$.

Manuscrit reçu en janvier 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

Bhabha H. J. — *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **154**, 195.
Critchfield L. et Wigner E. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 412.
Critchfield L. — *Phys. Rev.*, 1943, **63**, 417.
Dirac P. A. M. — The Principles of Quantum Mechanics, 1947, 3e éd., Oxford, Clarendon Press.
Dyson F. J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 929; *ibid.*, 1949, **75**, 485 et 1736.
Enatsu H. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1950, **5**, 102.
Fierz M. — *Z. Physik*, 1937, **104**, 553.
Jean M. et Prentki J. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 33.
Kemmer N. — *Proc. Roy. Soc.*, 1938, A **166**, 127.
Kofink W. — *Ann. Physik* (V), 1937, **30**, 91; *ibid.*, 1940, **38**, 420.
Kramers H. K. — *Proc. Amst. Akad. Sc.*, 1937, **40**, 814.
Le Couteur K. J. et Rosenfeld L. — *Phil Mag.*, 1949, **40**, 151.
Majorana E. — *Nuovo Cim.*, 1937, **14**, 171.
Marty C. — *Nature* (Lond.), 1950, **165**, 361.
Matthews P. T. — *Phys. Rev.*, 1949 *a.*, **76**, 684 et 1419. *Phys. Rev.*; 1949 *b.*, **76**, 1254.
Michel L. — *Proc. Phys. Soc.*, 1950 *a.*, A **63**, 514. *Nature* 1950 *b.*, 166, 654.
Møller C. — *Det Danske Vid. Sels*, 1945 et 1946, **23**, n° 1 et **22**, n° 19.
Nelson E. C. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 830.
Pauli W. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1936, **6**, 109; *Rev. Mod. Phys.*, 1941, **13**, 203.
Pais A. — *Kon. Ned. v. Wet. Verh.*, 1947, D 1, **19**, 1.
Racah G. — *Nuovo Cim.*, 1937, **14**, 322.
Vanhove L. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1519.

PERTES D'ÉNERGIE DES PARTICULES CHARGÉES DANS UN MILIEU TRÈS FORTEMENT IONISÉ (PLASMA IONIQUE)

Par BERNARD KWAL.
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Pour tenir compte de l'effet de freinage des électrons « libres » sur une particule qui traverse un milieu très fortement ionisé, on admet que la seule condition limitative de la « liberté » de ces électrons résulte de la possibilité de leur engagement dans les oscillations libres du plasma, envisagées par Langmuir. Les formules de Bohr et de Bethe sont ainsi transposées au cas du milieu très fortement ionisé, en y considérant respectivement, la fréquence de Langmuir à la place des fréquences interatomiques et l'énergie de l'oscillateur harmonique quantifié, à la place du potentiel moyen d'excitation de l'atome. Le potentiel d'interaction à l'intérieur du plasma n'étant pas du type coulombien, on se trouve obligé de faire subir à ces formules des modifications pour tenir compte de l'effet d'écran, modifications qui sont introduites grâce à l'emploi de la formule de Rutherford-Mott.

On discute, sur la base des résultats numériques, l'application des formules à la Physique cosmique et la possibilité de leur vérification expérimentale dans le cas des arcs électroniques à grande densité de courant.

1. Lorsqu'une particule électrisée traverse un milieu matériel, les pertes d'énergie qu'elle subit résultent des interactions coulombiennes avec les électrons atomiques (collisions simples) ou avec les noyaux (collisions radiatifs). Dans le premier cas, les pertes d'énergie seraient infinies, si les électrons heurtés n'étaient pas liés aux atomes, c'est-à-dire si, à partir d'un certain paramètre limite de choc, ils n'étaient plus capables de recevoir de l'énergie de la part de la particule incidente. La recherche du paramètre limite, ou plus exactement de l'énergie minimum qui peut être transférée en moyenne aux électrons, est donc essentielle en toute théorie des pertes d'énergie, aussi bien en théorie classique de Bohr qu'en théorie ondulatoire de Bethe.

Habituellement le milieu matériel est considéré comme formé d'atomes ou de molécules neutres et l'énergie limite est une grandeur liée à la structure même de la molécule et de l'atome. Pourtant dans les théories récentes (Fermi, Halpern et Hall, Wick et Schönberg) qui tiennent compte de l'effet de la polarisation du milieu, ce sont les propriétés des collections d'atomes ou de molécules qui entrent en jeu.

Un autre cas, qui va nous intéresser ici, est celui d'un milieu très fortement ionisé, où les ions de deux signes se trouvent en nombre égal et où l'on puisse parler d'une distribution de Maxwell-Boltzmann, tout au moins en ce qui concerne les électrons.

On envisage l'existence des milieux pareils dans l'étude des décharges électroniques dans les gaz, et, on leur donne, à la suite de Langmuir, le nom de *plasmas ioniques*, ou de plasmas tout court. Les atmosphères stellaires sont assimilées aux milieux de cette espèce, et, il est fort vraisemblable que de vastes régions de l'espace interstellaire possèdent des propriétés analogues.

C'est dire que le problème que nous nous proposons d'étudier peut avoir quelque intérêt, en particulier pour les théories de l'origine du rayonnement cosmique, qui font appel aux phénomènes d'accélération des ions, dans les milieux très fortement ionisés.

2. **Les propriétés du plasma ionique de Langmuir.** — Selon les idées de Debye et Hückel [3], un ion dans un milieu très fortement ionisé s'entoure d'un nuage d'ions de signes contraires dont la charge, moyenne dans le temps, est égale à celle de l'ion central. La liaison entre l'ion et son nuage peut être décrite au moyen d'un potentiel moyen U, qui, en vertu des lois de l'électrostatique et de la loi de distribution de Maxwell-Boltzmann, obéit à l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta U = -4\pi\rho = -8\pi N e \operatorname{sh} \frac{eU}{kT}, \tag{2.1}$$

N étant le nombre d'ions de chaque signe par unité de volume.

Cette équation se simplifie lorsque l'on a

$$eU \ll kT. \tag{2.2}$$

et admet alors une solution de la forme

$$U = \frac{e \exp\left(-\frac{r}{D}\right)}{r}, \tag{2.3}$$

avec

$$D = \left(\frac{kT}{8\pi N e^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

D est ce qu'on appelle le *rayon de Debye*, il détermine la sphère d'action des forces coulombiennes à l'intérieur du milieu ionisé.

De (2.3) on déduit que la valeur du potentiel

dû au nuage, à l'endroit de l'ion central (+) est égale à

$$\lim_{r=0} \left\{ \frac{e}{r} \left(e^{-\frac{r}{D}} - 1 \right) \right\} = - \frac{e}{D}. \tag{2.5}$$

On peut donc admettre qu'à l'intérieur du plasma chaque constituant possède une énergie potentielle moyenne égale à $\frac{e^2}{D}$.

Une autre propriété importante du plasma, ce sont les oscillations libres, des charges, qui, selon Langmuir s'effectuent avec la fréquence

$$\nu_L = \left(\frac{N e^2}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

m étant la masse de l'ion envisagé. Ainsi, pour les électrons, trouve-t-on

$$\nu_L = \left(\frac{N e^2}{\pi m_e} \right)^{\frac{1}{2}} = 8\,980 N^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Le plasma peut donc être assimilé à une collection d'oscillateurs harmoniques dont les dimensions sont de l'ordre de D et qui se trouvent en équilibre thermique avec le gaz électronique lui-même.

3. **Rappel de la théorie des pertes d'énergie que subit une particule électrisée traversant la matière.** — Nous devons distinguer la théorie corpusculaire classique de Bohr [2] et la théorie ondulatoire, quantique de Bethe [1].

Dans la première, la matière est assimilée à une collection d'oscillateurs harmoniques, et si p est le paramètre d'impact (distance la plus courte entre la trajectoire et le centre de l'oscillateur), on définit la durée de choc par la grandeur $\frac{p}{v}$, v étant la vitesse de la particule incidente. La chose essentielle de la théorie de Bohr est que, pour qu'il y ait transfert d'énergie, *il faut que la durée de choc soit inférieure à la période d'oscillation de l'oscillateur harmonique*

$$\frac{p}{v} < \frac{1}{2\nu\pi}, \tag{3.1}$$

car lorsque le choc est lent, l'oscillateur harmonique subit une modification adiabatique et le transfert d'énergie devient négligeable.

Cela étant la formule de Bohr qui donne la perte d'énergie s'écrit

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{2\pi z^2 Z e^4 N}{m v^2} \ln \frac{p_0^2}{p_{\max}^2 + p_0^2}, \tag{3.2}$$

avec

$$p_0 = \frac{z e^2 (M + m)}{v^2 b m M}, \qquad p_{\max} = \frac{v}{2\pi\nu}, \tag{3.3}$$

formule qui se réduit à la suivante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{4\pi z^2 Z e^4 N}{m v^2} \log \frac{v^3 M m}{2\pi\nu z e^2 (M + m)}, \tag{3.4}$$

pourvu que

$$p_{\max} \geqslant p_0. \tag{3.5}$$

Dans le cas des électrons ($z = 1$) traversant le plasma formé d'hydrogène atomique ($Z = 1$), on trouve que la condition (3.5) peut s'écrire

$$v^3 \geqslant \frac{e^2}{m} 2\pi \sqrt{\frac{N e^2}{\pi m}}, \tag{3.6}$$

c'est-à-dire

$$v \geqslant \frac{e}{\sqrt{m}} \sqrt[6]{4\pi N_-} \tag{3.2}$$

ou encore

$$\frac{m v^2}{2} \geqslant e^2 \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} N_-}. \tag{3.8}$$

Or $N_-^{-\frac{1}{3}}$ est la distance moyenne entre deux électrons dans le plasma, de sorte que la condition (3.8) exprime que l'énergie cinétique de l'électron incident doit être supérieure à l'énergie moyenne d'interaction de deux électrons voisins du plasma.

4. **Limites de validité de l'image classique et la formule ondulatoire quantique de Bethe.** — Les raisonnements précédents, basés sur les idées de la Mécanique classique, sont valables aussi longtemps qu'on puisse localiser une particule sur une trajectoire bien définie avant et après le choc. Si U est le potentiel d'interaction s'étendant sur une distance r, la nécessité de localiser la particule dans ce domaine conduit à la condition

$$\frac{h}{2\pi M v} \leqslant r. \tag{4.1}$$

Comme d'autre part nous devons être en mesure de décrire le mouvement après le choc, il est nécessaire de pourvoir déterminer la déviation subie par la particule, c'est-à-dire le transfert de la quantité de mouvement $\left(\text{qui est de l'ordre de } \frac{U}{v}\right)$ au moment du choc. D'où la seconde condition

$$\frac{h}{2\pi M v} \leqslant r \frac{U}{M v^2}. \tag{4.2}$$

Comme l'énergie transférée, étant de l'ordre de $\frac{U^2}{2 M v^2}$, doit être inférieure à $\frac{1}{2} M v^2$, on voit que l'on a toujours

$$\frac{U}{M v^2} < 1, \tag{4.3}$$

de sorte que la condition (4.2) entraîne la condition (4.1), mais l'inverse n'est pas vrai.

Dans le cas du champ coulombien $V = \frac{Z z^2}{r}$ et la condition (4.2) s'écrit

$$\frac{Z z\, 2\pi e^2}{h v} \quad 1 \tag{4.4}$$

et elle *est indépendante de la distance au centre de l'atome r* [12].

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, il devient alors nécessaire de recourir au formalisme de la Mécanique ondulatoire. En particulier, lorsque la condition inverse

$$\frac{Zz\,2\pi e^2}{hv} \leqslant 1 \qquad (4.5)$$

est satisfaite, on peut employer la méthode d'approximation de Born, ce qui conduit à la formule suivante, due à Bethe [1] :

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{4\pi z^2 Z e^4 N}{mv^2} \ln \frac{(2)\,mv^2}{\bar{I}} \;(^1), \qquad (4.6)$$

où I est l'énergie moyenne d'excitation du système envisagé. Ainsi dans le cas d'un oscillateur harmonique l'énergie $\bar{I}$ est-elle égale à $h\nu$, tandis que dans le cas des atomes on a

$$\bar{I} = 13{,}5\, Z\,\text{eV} = 21{,}6\, Z.10^{-12}\ \text{ergs}. \qquad (4.7)$$

Enfin lorsque la vitesse v est voisine de celle de la lumière, les considérations relativistes conduisent à la formule

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{4\pi z^2 Z e^4 N}{mv^2} \left\{ \ln \frac{\sqrt{2\,W mv^2}}{I(1-\beta^2)} - \frac{1}{2}\beta^2 \right\}. \qquad (4.8)$$

où W est l'énergie maximum pouvant être transférée à l'électron heurté par la particule rapide qui occasionne la collision. Lorsque cette dernière particule est plus lourde que l'électron et que son énergie $E \ll \left(\frac{M}{m}\right) Mc^2$, on a

$$W = \frac{2\,mv^2}{1-\beta^2} \qquad (4.9)$$

et l'on trouve

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{4\pi z^2 Z e^4 N}{mv^2} \left\{ \ln \frac{2\,mv^2}{I(1-\beta^2)} - \frac{1}{2}\beta^2 \right\}. \qquad (4.10)$$

C'est la formule à laquelle conduit en Mécanique ondulatoire la méthode d'approximation de Born, appliquée aux particules lourdes.

5. Théorie des pertes d'énergie dans un milieu très fortement ionisé où le champ d'interaction n'est pas coulombien. — Dans le plasma ionique de Langmuir, le champ d'interaction n'est pas coulombien, mais du type qui traduit l'effet d'écran. Il en résulte que nous devons modifier les raisonnements qui ont conduit aux formules précédentes.

En particulier, aux faibles vitesses, la seconde condition d'applicabilité du formalisme de la Mécanique classique s'écrit

$$\frac{Zz\,2\pi e^2}{hv}\, e^{-\frac{r}{D}} \gg 1, \qquad (5.1)$$

qui doit remplacer dans le plasma ionique la condition (4.4). Cette condition fait intervenir le paramètre d'impact r, ce qui fait que, *même aux vitesses très faibles, l'application de la Mécanique classique et,* par voie de conséquence, *de la formule de Bohr, n'est pas permise,* contrairement à ce que nous avons écrit dans notre premier travail sur ce sujet [7].

a. Pertes d'énergie aux faibles vitesses. — Afin de pouvoir faire le calcul de ces pertes, nous allons diviser l'espace du paramètre de choc en trois régions : I, région où la condition (5.1) se trouve satisfaite : $r < r_1$; II, région intermédiaire $r_1 < r < r_2$; III, région où la condition inverse de (5.1) est satisfaite et, où l'on se trouve en droit de pouvoir appliquer la méthode d'approximation ondulatoire de Born.

Dans la région I, la théorie classique de Bohr fournit pour les pertes d'énergie l'expression suivante :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi N Z z^2 e^4}{mv^2} \ln \frac{mv^2 r_1}{2z e^2} = A \ln \frac{mv^2 r}{2z e^2}. \qquad (5.2)$$

Dans la région III nous avons affaire au problème de Mécanique ondulatoire en présence d'un potentiel d'interaction [2], caractéristique de l'effet d'écran. Une formule, due à Mott, donne la distribution des particules diffusées sous l'angle θ (formule de Rutherford, modifiée par l'effet d'écran) :

$$P(\theta)\,d\theta = 2\pi N z^2 e^4 M^{-2} v^{-4} \times \left[\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\lambda}{4\pi D}\right)^{+2}\right]^{-2} \sin\theta\, d\theta. \qquad (5.3)$$

Mais, dans la région III, nous avons affaire aux faibles déviations, de sorte que la formule précédente peut encore s'écrire :

$$P(\theta)\,d\theta = 2AM^{-1}v^{-2}\left[\theta^2 + \left(\frac{h}{\pi MvD}\right)^{+2}\right]^{-2}\theta\, d\theta. \qquad (5.4)$$

Une déviation sous l'angle θ correspond au transfert de quantité de mouvement $Mv\theta$ et au transfert d'énergie $\frac{(Mv\theta)^2}{2m}$. La perte d'énergie sera donc donnée par l'expression

$$A \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\theta^3\, d\theta}{\left[\theta^2 + \frac{h}{\pi MvD}\right]^2}, \qquad (5.5)$$

où θ_2 correspond au paramètre de choc r_2, $\theta_2 = \frac{h}{2\pi Mvr_2}$, tandis que $\theta_1 = \frac{h\nu_L}{Mv^2}$, ν_L étant la fréquence de l'oscillateur harmonique de Langmuir.

En négligeant $\frac{h}{2\pi MvD}$ devant θ_2, on trouve pour (5.5) la valeur que voici :

$$\frac{A}{2}\left\{ \ln\left[r_2^2\left(\frac{2\pi\nu_L}{v}\right)^2 + \left(\frac{1}{D}\right)^2 \right] - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{2\pi\nu_L D}\right)^2 \frac{1}{1-\left(\frac{v}{2\pi\nu_L D}\right)^2} \right\}. \qquad (5.6)$$

(¹) Le facteur (2) est relatif aux particules lourdes.

Nous allons admettre que les formules (5.2) et (5.6) se rejoignent à travers la région II, de sorte que l'on puisse attribuer avec une bonne approximation aux pertes d'énergie que la particule subit dans cette dernière région, l'expression suivante :

$$A \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{5.7}$$

En additionnant les pertes subies dans les trois régions envisagées, on trouve finalement pour la perte cherchée d'énergie l'expression que voici :

$$A\left\{\ln \frac{mv^3}{4\pi z e^2 \nu_L \sqrt{1+\left(\frac{v}{v_T}\right)^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_T}\right)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{v}{v_T}\right)^2}\right\}. \tag{5.8}$$

où $v_T = 2\pi\nu_L D$ est la vitesse thermique des électrons du plasma.

Cette formule tend vers la formule de Bohr lorsque $v \to v_T$. Lorsque, en revanche, la vitesse v est suffisamment élevée par rapport à v_T, on a alors

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = A\left\{\ln \frac{mv^2 D}{2 z e^2} - \frac{1}{2}\right\}. \tag{5.9}$$

En faisant abstraction du terme constant $-\frac{1}{2}$, la formule peut s'interpréter « classiquement » en disant que les paramètres de chocs qui contribuent aux pertes se situent entre le paramètre minimum de choc classique et le rayon de Debye D.

b. Pertes d'énergie aux vitesses relativistes. — Lorsque la condition (4.5) se trouve satisfaite, on a *a fortiori*

$$\frac{Zz2\pi e^2}{hv} \mathrm{e}^{-\frac{r}{D}} \leqslant 1 \tag{5.10}$$

pour toutes les valeurs du paramètre d'impact r et nous avons le droit de nous servir de la méthode d'approximation ondulatoire de Born. Cette méthode conduirait à la formule de Bethe (4.8), si le champ d'interaction était coulombien. Comme ce n'est pas le cas, nous devons modifier la formule (4.8) pour tenir compte de l'effet d'écran. Comme cet effet joue surtout aux faibles déviations, nous pouvons reprendre nos raisonnements précédents, en ayant soin de noter que nous avons maintenant $v \gg v_T$, et qu'aux vitesses relativistes au paramètre de choc r correspond une déviation $\theta = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi M v r}$. Nous avons vu, en se basant sur la formule de Mott, que l'effet d'écran se répercute sur la limitation des angles de déviation à celui qui correspond au paramètre de choc égal à D. On a donc

$$\theta_{\min} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{2\pi M v D} \tag{5.11}$$

et l'énergie minimum transférée à un électron du plasma au cours des chocs aura pour valeur

$$W_{\min} = \frac{(Mv\theta_{\min})^2}{2m} = \frac{h^2(1-\beta^2)}{8\pi^2 m D^2}. \tag{5.12}$$

c'est cette valeur qui doit remplacer l'énergie minimum $\frac{I^2(1-\beta^2)}{2mv^2}$, caractéristique de la formule de Bethe. Compte tenu également du terme $\left(\frac{1}{2}\right.$ dans le cas $\left.v \gg v_T\right)$ qui s'introduit en dehors du logarithme, on obtient finalement la formule suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\pi z^2 Z e^4 N}{mv^2}\left\{\ln \frac{4\pi m v D}{h(1-\beta^2)} - \frac{1}{2}(1+\beta^2)\right\} \\ &= A\left\{\ln \frac{2 m v v_T}{h\nu_L(1-\beta^2)} - \frac{1}{2}(1+\beta^2)\right\}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les formules (5.9) et (5.13) sont d'ailleurs tout à fait générales et peuvent être appliquées au calcul des pertes d'énergie chaque fois que le potentiel d'interaction est de la forme (2.3).

6. Application : Pertes d'énergie d'une particule chargée traversant une atmosphère d'hydrogène atomique très fortement ionisée. — Nous allons calculer maintenant l'augmentation des pertes d'énergie, que, selon les considérations précédentes, subissent les particules chargées traversant des atmosphères gazeuses très fortement ionisées. Nous prendrons à titre d'exemple une atmosphère d'hydrogène atomique dont le degré d'ionisation est égal à x [le rapport du nombre d'ions $N_+ = N_-$ au nombre total N_t de particules lourdes (atomes neutres N_n plus les ions N_+)]

$$N_+ = N_- = xN_t, \qquad N_n = (1-x)N_t.$$

Cela étant, nous allons poser

$$A = \frac{4\pi z^2 Z e^4}{mv^2},$$

$$f_{\mathrm{cl}}(\beta) = \ln \frac{(2)Mmv}{(M+m)},$$

$$f_{\mathrm{ond}}(\beta) = \ln \frac{2mv^2}{1-\beta^2} - \frac{1}{2}\beta^2.$$

ce qui va nous permettre d'écrire les formules, classique et ondulatoire, donnant les pertes d'énergies dans le milieu envisagé, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\mathrm{cl}} = A &\Big\{ N_n\left[f_{\mathrm{cl}}(\beta) - \ln(zZe^2\nu_A)\right] \\ &+ N_+\left[f_{\mathrm{cl}}(\beta) - \ln(zZe^2\nu_+)\right] \\ &+ N_-\left[f_{\mathrm{cl}}(\beta) - \ln\left(zZe^2\frac{v}{2\pi D}\right)\right]\Big\} \\ = A N_t &\Big\{(1+x)\left[f_{\mathrm{cl}}(\beta) - \ln(zZe^2)\right] \\ &- \ln\left[\nu_A^{1-x}\nu_+^x\left(\frac{v}{2\pi D}\right)^x\right]\Big\},\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\mathrm{ond}} = AN_+\left\{(1+x)f_{\mathrm{ond}}(\beta) - \ln\left[\bar{I}_A^{(1-x)}\bar{I}_+^x\left(h\frac{v}{2\pi D}\right)^x\right.\right.$$

Dans ces formules ν_A et ν_+ signifient respectivement la fréquence de vibrations électroniques dans l'atome neutre et dans l'ion, tandis que I_A et $\bar{I}_+$ sont les potentiels d'excitation moyen de l'atome et de l'ion, envisagés. Dans le cas de l'hydrogène atomique, les formules précédentes se simplifient, et il vient alors

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{el}} = AN_t\left\{f_{\text{el}}(\beta) - \ln(zZe^2) - \ln\left[\nu_A^{(1-x)}\left(\frac{v}{2\pi D}\right)^x\right]\right\},$$

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{ond}} = AN_t\left\{f_{\text{ond}}(\beta) - \ln\left[I_A^{(1-x)}\left(h\,\frac{v}{2\pi D}\right)^x\right]\right\}.$$

Pour l'hydrogène atomique la valeur du potentiel moyen d'excitation est égale à 13,5 $eV = 2{,}2.10^{-11}$ ergs, tandis que pour le plasma de Langmuir, on a $h\nu_L = 6.10^{-23}\sqrt{N}$ ergs. Dans les atmosphères très ionisées et extrêmement raréfiées, les dimensions atomiques deviennent très faibles par rapport à D et l'on doit assister à une augmentation des pertes dues aux interactions entre la particule rapide et le milieu traversé par elle, augmentation d'autant plus grande que la température du milieu est plus élevée.

Nous allons désigner par K le rapport entre la perte d'énergie dans un milieu ionisé et la perte d'énergie dans un milieu totalement neutre ($x = 0$) et contenant le même nombre N_t de particules lourdes. On trouvera ci-dessous un tableau donnant K pour un milieu complètement ionisé ($x = 1$) en fonction de la densité (exprimée par le nombre de protons par centimètre cube) et de la vitesse de la particule incidente, électron et proton (ou particule α). Les nombres K_1, K_2 et K_3 sont relatifs aux densités $N = 1$, 10^{10} et 10^{15}, respectivement. Comme température du milieu nous avons pris, dans le cas des électrons 10^4 degrés et dans le cas des particules lourdes 10^6 degrés.

Tableau I.

Électrons.

eV	100.	500.	1000.	5000.
K_1	10	6,4	5,6	4,4
K_2	5,3	3,8	3,3	2,6
K_3	3,6	2,5	2,1	1,6

Protons et hélions.

eV	1,8.10⁵.	9,15.10⁵.	1,8.10⁶.	9,15.10⁶.	3,7.10[illegible].	8,4.10[illegible].
eV	7,2.10[illegible]	3,7.10⁶.	7,2.10⁶.	3,7.10⁷.	1,5.10⁹.	3,3.10¹⁰.
K_1	10	6,3	5,7	4,6	3,1	2,4
K_2	5,5	4	3,3	2,6	2,0	1,7

Nous avons déterminé également quatre valeurs x_1 et x_2 du degré d'ionisation x pour lesquelles les rapports K ont la valeur 1,2 et 2 respectivement, et ceci pour les électrons seuls de 100, 500 et 1000 eV.

Tableau II.

	eV	100	500.	1000.
$N = 10^{10}$	x_1	0,04	0,75	0,09
	x_2	0,21	0,36	0,4
$N = 10^{15}$	x_1	0,07	0,14	0,[illegible]
	x_2	0,38	0,67	1,0

6. **Discussion des résultats.** — Comme on le voit l'action du milieu ionisé est d'autant plus grande que la vitesse des particules est plus faible. Du point de vue énergétique, c'est donc pour les électrons de faible énergie que l'effet sera le plus marqué. Nos formules ne sont pas valables au voisinage de l'énergie critique qui correspond dans l'hydrogène à la vitesse $v = \frac{c}{137}$. Pour une énergie nettement supérieure nous devons et nous avons employé la formule modifiée de Bethe, tandis que pour une énergie nettement inférieure nous devons employer la formule modifiée de Bohr, jusqu'à l'énergie minimum limite, qui est l'énergie moyenne d'interaction entre deux électrons voisins du plasma.

Nous pensons que, d'une manière générale, ce sont là les bases d'une théorie cinétique correcte des phénomènes qui se passent à l'intérieur du plasma ionique. (Gabor [5], Landau [8], etc.).

En ce qui concerne l'application immédiate des résultats numériques rassemblés dans les Tableaux I et II, nous discuterons brièvement le cas de l'espace interstellaire et des atmosphères stellaires, et nous indiquerons la possibilité de vérifier nos formules dans le cas des arcs électriques à grande densité de courant, où le degré d'ionisation peut atteindre plusieurs pour-cents.

Dans l'espace interstellaire et les atmosphères stellaires on trouve des densités de matière (hydrogène surtout) extrêmement faibles et les degrés d'ionisation extrêmement élevés, toutes choses qui favorisent l'effet ici étudié.

La densité moyenne de l'espace interstellaire est d'un atome H par centimètre cube, la matière étant concentrée dans des nuages plus denses ($N = 10$ à 100) qui occupent en volume le 5 pour 100 de l'espace total. Ces nuages sont peu ionisés (B. Strömgren [10]. La région entre des nuages où la densité est plus faible ($N = 0{,}1$) semble, par contre, être complètement ionisée, de même que des nuages entourant les étoiles particulièrement chaudes.

En prenant 100 pour le rapport de densités dans les nuages ($N = 17$) et dans le milieu en dehors d'eux $\left(N = \frac{1}{6}\right)$, et en considérant que seules ces dernières régions soient complètement ionisées, on trouve qu'un proton de 200 MeV en cheminant dans les espaces interstellaires perd en moyenne 1,5 fois plus d'énergie, qu'il ne perdrait dans un milieu, composé uniquement d'atomes neutres. Il semble donc que les énergies d'injection nécessaires,

par exemple, pour amorcer le mécanisme d'accélération de rayons cosmiques imaginé par Fermi [4] soient trop faibles et qu'il faudrait le situer plutôt vers 400 MeV (pour les protons).

Il nous semble également qu'il faille tenir compte de ces pertes d'énergies, dans toutes les théories qui situent l'origine du rayonnement cosmique au sein de la matière très fortement ionisée ou qui envisage une circulation s'étendant sur de longues durées de temps à l'intérieur du système solaire où le milieu est à la fois relativement dense (N = 100 à 1000) et complètement ionisé.

Manuscrit reçu le 13 novembre 1950.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bethe H. — *Ann. Physik*, 1930, **5**, 325.
[2] Bohr N. — *Phil. Mag.*, 1913, **25**, 10; 1915, **30**, 58.
[3] Debye P. et Hückel E. — *Physik Z.*, 1923, **24**, 185 et 305.
[4] Fermi E. — *Phys. Rev.*, 0000, **66**, 777.
[5] Gabor D. — *Z. Physik*, 1933, **84**, 474.
[6] Kourganoff V. — Conférences à l'Institut d'Astrophysique de Paris, 1950.
[7] Kwal B. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 1662.
[8] Landau L. — *Physik Z. Sowjet Union*, 1936, **10**, 154.
[9] Langmuir I. — *Phys. Rev.*, 1925, **26**, 585; *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 1928, **14**, 627.
[10] Strömgren B. — *Astroph. J.*, 1948, **108**, 242.
[11] Tonks L. et Langmuir I. — *Phys. Rev.*, 1928, **33**, 195.
[12] Williams E. J. — *Rev. Mod. Physics*, 1945, **17**, 217.
[13] Mott N. F. et Massey H. S. W. — *The Theory of Atomic Collisions*, 2e éd., Oxford, 1949.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, OCTOBRE 1951, PAGE 810.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ONDES DU CORPUSCULE DE SPIN $\frac{1}{2}\hbar$ EN INTERACTION AVEC UN POTENTIEL PSEUDOSCALAIRE RADIAL

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Étude de la résolution des équations d'ondes du corpuscule de spin $\frac{1}{2}\hbar$ dans le cas où ce corpuscule est soumis à l'action d'un potentiel radial de type pseudoscalaire. Représentant les fonctions d'ondes par des combinaisons de fonctions sphériques et de fonctions radiales, nous établissons le système différentiel déterminant les fonctions radiales et nous en précisons les solutions dans divers cas particuliers (potentiel pseudoscalaire constant, potentiel pseudoscalaire en $\frac{1}{r}$, seul ou en combinaison avec des potentiels électrostatiques et scalaires).

1. Forme générale des solutions. Séparation des fonctions radiales. — La détermination des valeurs propres et fonctions propres caractérisant les solutions de l'équation d'ondes relativiste de Dirac du corpuscule de spin $\frac{\hbar}{2}$ dans un champ électrostatique coulombien a été l'un des premiers problèmes résolu de la théorie de l'électron. Dans ces dernières années, l'utilisation de l'équation d'ondes de Dirac pour la représentation des nucléons a conduit à l'étude du problème analogue dans le cas où le corpuscule est soumis à l'action de potentiels, non seulement électrostatiques, mais également nucléaires tels que ceux des champs mésoniques des divers types [1].

Nous nous proposons ici d'examiner le cas, non encore étudié à notre connaissance, dans lequel le corpuscule de Dirac est soumis à l'action d'un potentiel radial de type pseudoscalaire.

Nous représenterons le corpuscule de Dirac en l'absence d'interaction par les solutions de l'équation d'ondes

$$\left[p_0 + (\mathbf{p}.\vec{\alpha}) + m_0 c \alpha_4\right]\psi = 0. \qquad (1)$$

Les matrices $\vec{\alpha}$, α_4, forment un système de quatre matrices anticommutantes

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

$$p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}.$$

Nous désignerons par α_5 la matrice

$$\alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Nous adopterons le choix de la représentation des matrices $\vec{\alpha}$, α_4 utilisé par G. Darwin [2] et H. A. Bethe [3]

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_5 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Dans le cas où le corpuscule est soumis à l'action d'un potentiel électrostatique $U(r)$, d'un potentiel de type mésonique scalaire $I_1(r)$ et d'un potentiel de type mésonique pseudoscalaire $I_2(r)$, nous complèterons l'équation (1) par le terme d'interaction

$$U(r) + I_1(r)\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5, \tag{2}$$

cette équation s'écrivant maintenant

$$\Big[p_0 + (\mathbf{p}.\vec{\alpha}) + m_0 c\alpha_4 + U(r) + I_1(r)\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5\Big]\psi = 0. \tag{3}$$

Pour une solution correspondant à la valeur W de l'énergie, nous écrirons

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{\frac{i}{\hbar}Wt}$$

et les fonctions $\psi(x, y, z)$ seront déterminées par l'équation

$$\left\{\frac{W}{c} + U(r) + [m_0 c + I_1(r)]\alpha_4 + I_2(r)\alpha_5 + (\mathbf{p}.\vec{\alpha})\right\}\psi = 0. \tag{4}$$

Nous chercherons les solutions de cette équation représentées par des combinaisons de fonctions radiales et de fonctions sphériques

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\theta)\, e^{im\varphi}. \tag{5}$$

Nous adopterons dans ce qui suit le choix de la représentation de ces fonctions utilisé par G. Darwin [2], soit

$$Y_l^m = \frac{(l-m)!}{2^l\, l!}\, e^{im\varphi} \sin^m\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m} (\cos^2\theta - 1)^l, \tag{6}$$

Ces fonctions ne sont pas normalisées, mais l'emploi des fonctions sphériques normalisées complique arbitrairement les calculs [4] et l'introduction de ces fonctions normalisées

$$\mathbf{Y}_l^m = \left[\frac{1}{4\pi}\, \frac{2l+1}{(l+m)!\,(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} Y_l^m \tag{7}$$

peut s'effectuer facilement dans les expressions que nous obtiendrons en fin de calculs.

L'équation (4) admet l'intégrale première

$$\mathbf{N} = (\mathbf{x}\wedge\mathbf{p}) - \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} = -i\hbar(\mathbf{x}\wedge\mathrm{grad}) - \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.$$

Passant en coordonnées sphériques, nous avons

$$N_z = -i\hbar(x\,\partial_y - y\,\partial_x) - \frac{\hbar}{2}\, i\alpha_1\alpha_2 = -\hbar\left(i\,\partial_\varphi + \frac{1}{2}\, i\alpha_1\alpha_2\right).$$

Par suite, si les ψ_j sont des combinaisons de fonctions sphériques, soient

$$\psi_j = \sum a_{l_j}^{u_j} Y_{l_j}^{u_j}(\theta, \varphi) = \sum a_{l_j}^{u_j} P_{l_j}^{u_j}(\theta)\, e^{iu_j\varphi}$$

nous aurons

$$N_z\psi_j = \sum \hbar\left[u_j - \frac{1}{2}(i\alpha_1\alpha_2)\right] a_{l_j}^{u_j} Y_{l_j}^{u_j}(\theta, \varphi) \tag{8}$$

Avec le choix ci-dessus des matrices α

$$i\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}.$$

Par suite, si nous prenons des u_j de la forme $u_1 = m$, $u_2 = m + 1$, $u_3 = m$, $u_4 = m + 1$, nous aurons

$$N_z\psi_j = \hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)\psi_j, \tag{9}$$

et la solution ψ correspondante sera caractérisée par la valeur propre

$$\hbar\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

du moment cinétique total N_z.

Avec les expressions ci-dessus des matrices α, le système (4) se développe sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) + m_0 c + I_1(r)\right]\psi_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3 + \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_4 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) + m_0 c + I_1(r)\right]\psi_2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4 + \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_3 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) - m_0 c - I_1(r)\right]\psi_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_1 - \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_1 = 0, \\
&\frac{i}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + U(r) - m_0 c - I_1(r)\right]\psi_4 \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 - \frac{1}{\hbar} I_2(r)\psi_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Si nous cherchons, selon le procédé de Darwin, une solution de la forme

$$\left.\begin{array}{ll}\psi_1 = i a_1 \mathbf{F}(r) Y_{l+1}^u, & \psi_2 = i a_2 \mathbf{F}(r) Y_{l+1}^{u+1}, \\ \psi_3 = a_3 \mathbf{G}(r) Y_l^u, & \psi_4 = a_4 \mathbf{G}(r) Y_l^{u+1}.\end{array}\right\} \qquad (11)$$

en utilisant les relations

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r) Y_k^u = \frac{1}{2k+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y_{k+1}^{u+1} - (k-u)(k-u-1)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y_{k-1}^{u+1}\right], \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r) Y_k^u = \frac{1}{2k+1}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y_{k+1}^{u-1} + (k+u)(k+u-1)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y_{k-1}^{u-1}\right], \\ \frac{\partial}{\partial z} f(r) Y_k^u = \frac{1}{2k+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r}\right) f Y_{k+1}^u + (k+u)(k-u)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r}\right) f Y_{k-1}^u\right],\end{array}\right\} \qquad (12)$$

on voit immédiatement que la compensation entre les coefficients des fonctions sphériques qui permet de déterminer les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 n'est plus possible ici.

Pour réaliser cette compensation nous voyons immédiatement que l'introduction dans chacun des ψ_j de deux fonctions sphériques est nécessaire.

Ceci nous conduit à prendre pour solution d'essai les fonctions

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1 = i a_1 \mathbf{F} Y_{l+1}^u + i b_1 \mathbf{H} Y_l^u, \\ \psi_2 = i a_2 \mathbf{F} Y_{l+1}^{u+1} + i b_2 \mathbf{H} Y_l^{u+1}, \\ \psi_3 = a_3 \mathbf{G} Y_l^u + b_3 \mathbf{K} Y_{l+1}^u, \\ \psi_4 = a_4 \mathbf{G} Y_l^{u+1} + b_4 \mathbf{K} Y_{l+1}^u,\end{array}\right\} \qquad (13)$$

en introduisant quatre fonctions radiales

$$\mathbf{F}(r), \quad \mathbf{G}(r), \quad \mathbf{H}(r), \quad \mathbf{K}(r).$$

La substitution des fonctions (13) dans le système (10) nous donne, par exemple, pour la première équation

$$\begin{array}{l}\left[-\frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) a_1 \mathbf{F} \right. \\ \left. \quad + \frac{(a_3 - a_4)}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{I_2}{h} b_3 \mathbf{K}\right] Y_{l+1}^u \\ \quad + \left\{-\frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) b_1 \mathbf{H} \right. \\ \qquad + \frac{(l+u+1)}{2l+3}[(l+u+2)b_4 + (l+1-u)b_3] \\ \qquad\qquad \left. \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + I_2 a_3 \mathbf{G}\right\} Y_l^u \\ \quad + \frac{(l+u)}{2l+1}[(l+u+1)a_4 + (l-u)a_3] \\ \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)\mathbf{G}\, Y_{l-1}^u \\ \qquad\qquad + \frac{(b_3 - b_4)}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l+1}{r}\right)\mathbf{K}\, Y_{l+2}^u = 0.\end{array} \qquad (14)$$

Annulant les coefficients des fonctions sphériques dans cette équation et les trois autres que l'on obtient de la même façon, on a les relations entre coefficients

$$\left.\begin{array}{ll}b_3 - b_4 = 0, & (l+u+1)a_4 + (l-u)a_3 = 0; \\ a_1 - a_2 = 0, & (l-u)b_1 + (l+u+1)b_2 = 0\end{array}\right\} \qquad (15)$$

et les équations entre fonctions radiales

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right) a_1 \mathbf{F} \\ \qquad + \frac{a_3}{l+u+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{1}{\hbar} I_2 b_3 \mathbf{K} = 0, \\ -\frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} + m_0 c - U + I_1\right) b_1 \mathbf{H} \\ \qquad + (l+u+1) b_3 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + \frac{1}{\hbar} I_2 a_3 \mathbf{G} = 0, \\ \frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} - m_0 c - U - I_1\right) a_3 \mathbf{G} \\ \qquad + (l+u+1) a_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{F} - \frac{1}{\hbar} I_2 b_1 \mathbf{H} = 0, \\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right) b_3 \mathbf{K} \\ \qquad + \frac{b_1}{l+u+1}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{H} - \frac{1}{\hbar} I_2 a_1 \mathbf{F} = 0.\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Modifiant légèrement les notations en écrivant **F**, **G**, **H**, **K** pour

$$a_1 \mathbf{F}, \quad \frac{a_3}{l+u+1}\mathbf{G}, \quad \frac{b_1 \mathbf{H}}{l+u+1}, \quad b_3 \mathbf{K},$$

le système (16) devient

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right)\mathbf{F} \\ \qquad + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{G} + \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{K} = 0, \\ -\frac{1}{h}\left(\frac{W}{c} + m_0 c + U + I_1\right)\mathbf{H} \\ \qquad + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{K} + \frac{I_2}{\hbar}\mathbf{G} = 0, \\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right)\mathbf{G} \\ \qquad + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r}\right)\mathbf{F} - \frac{I_2}{h}\mathbf{H} = 0, \\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0 c + U - I_1\right)\mathbf{K} \\ \qquad + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\mathbf{H} - \frac{I_2}{h}\mathbf{F} = 0,\end{array}\right\} \qquad (1$$

avec

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= i\mathbf{F}Y^u_{l+1} + i(l+u+1)\mathbf{H}Y^u_l,\\ \psi_2 &= i\mathbf{F}Y^{u+1}_{l+1} - (l-u)\mathbf{H}Y^{u+1}_{l+1},\\ \psi_3 &= (l+u+1)\mathbf{G}Y^u_l + \mathbf{K}Y^u_{l+1},\\ \psi_4 &= -(l-u)\mathbf{G}Y^{u+1}_l + \mathbf{K}Y^{u+1}_{l+1}.\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nous simplifierons la forme du système (16) en introduisant au lieu des fonctions **F**, **G**, **H**, **K** de nouvelles fonctions F, G, H, K telles que

$$F = r\mathbf{F}, \qquad G = r\mathbf{G}, \qquad H = r\mathbf{H}, \qquad K = r\mathbf{K} \quad (19)$$

et en posant

$$l + 1 = j. \quad (20)$$

Le système (17) s'écrit maintenant

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0c + U + I_1\right)F + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G + \frac{I_2}{\hbar}K = 0,\\ -\frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} + m_0c + U + I_1\right)H + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)K + \frac{I_2}{\hbar}G = 0,\\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0c + U - I_1\right)G + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{I_2}{\hbar}H = 0,\\ \frac{1}{\hbar}\left(\frac{W}{c} - m_0c + U - I_1\right)K + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)H - \frac{I_2}{\hbar}F = 0,\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Si, dans ce système, nous faisons $I_2(r) = 0$ nous retrouvons pour F et G d'une part, pour H et K d'autre part, les deux systèmes d'équations radiales que l'on obtient dans les cas d'interactions électrostatique [$U(r)$ seul] ou scalaire [$I_1(r)$ seul].

Dans le cas général, l'étude du système (21) est complexe. Nous n'en déterminerons les solutions que pour des formes particulières des potentiels $U(r)$, $I_1(r)$, $I_2(r)$.

2. Cas des potentiels constants. — Le système (21) introduit d'une façon générale quatre fonctions F, G, H, K. On peut, avant d'aller plus loin, examiner dans quels cas ce nombre peut être abaissé.

Pour cela, nous allons chercher sous quelles conditions les équations déduites du système (21) par l'hypothèse $K = 0$ ou $H = 0$ sont encore compatibles.

Considérons, par exemple, le cas où nous avons $K = 0$.

Nous poserons

$$\left.\begin{aligned}M(r) &= \frac{W}{c} + m_0c + U(r) + I_1(r),\\ N(r) &= \frac{W}{c} - m_0c + U(r) - I_1(r).\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Le système (21) s'écrit maintenant

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\hbar}MF + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G = 0,\\ \frac{1}{\hbar}NG + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{I_2}{\hbar}H = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)H - \frac{I_2}{\hbar}F = 0,\\ MH - I_2G = 0.\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

On voit immédiatement que ces équations ne sont compatibles que si nous avons

$$I_1(r)\ \text{const.}, \qquad I_2(r) = \text{const.}, \qquad U(r) = \text{const.} \quad (24)$$

Le système (23) se ramène alors aux équations

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{1}{\hbar}MF = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \left(\frac{MN - I_2^2}{\hbar M}\right)G = 0,\\ H = \frac{I_2}{M}G, \qquad K = 0.\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

De même, pour avoir $H = 0$ ($K \neq 0$), les interactions U, I_1, I_2 doivent être constantes et le système (21) se réduit à

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \frac{1}{\hbar}NG = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{MN - I_2^2}{\hbar N}F = 0,\\ K = \frac{I_2F}{N}, \qquad H = 0.\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Dans le système (25) l'élimination de F ou de G nous donne les équations

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{j(j-1)}{r^2} + \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\right]G = 0,\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{j(j+1)}{r^2} + \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\right]F = 0.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Posant

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{MN - I_2^2}{\hbar^2}\\ &= \frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c} + U\right)^2 - (I_1 + m_0c)^2 - I_2^2\right], \end{aligned} \quad (28)$$

es équations (27) s'écrivent encore

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right]G = 0,\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \lambda^2 - \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right]F = 0,\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Désignant par $Z_n(x)$ la fonction cylindrique générale d'ordre n (fonction de Bessel ou de Hankel selon les conditions aux limites) nous obtenons immédiatement les solutions

$$G = a_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r), \qquad F = b_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r), \quad (30)$$

Mais les constantes a_0 et b_0 ne sont pas indépendantes car F et G sont liées par

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{M}{\hbar}F = 0, \quad (31)$$

ce qui nous donne, en utilisant les relations de récurrence entre fonctions cylindriques

$$Mb_0 = -a_0\hbar\lambda. \quad (32)$$

Nous obtenons alors la solution du système (25)

$$\left.\begin{aligned} G &= a_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ F &= -a_0\frac{\hbar\lambda}{M}\sqrt{\lambda r}\,Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ H &= a_0\frac{I_2}{M}\sqrt{\lambda r}\,Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

De même, le système (26) nous donne les équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{j}{r}\right)F+\frac{N}{\hbar}G=0,\\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\lambda^2-\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]F=0,\\ &\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\lambda^2-\frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]G=0,\\ &K=\frac{I_2}{N}F,\qquad H=0 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

dont la solution s'écrit

$$\left.\begin{aligned} F &= b_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ G &= -b_0\frac{\hbar\lambda}{N}\sqrt{\lambda r}\,Z_{j-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= b_0\frac{I_2}{N}\sqrt{\lambda r}\,Z_{j+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ H &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Les constantes restant arbitraires a_0 et b_0 seront déterminées par les conditions de normalisation.

3. **Cas des potentiels en** $\frac{1}{r}$. — Nous allons maintenant rechercher les solutions du système (21) dans le cas où le potentiel pseudoscalaire $I_2(r)$ est de la forme coulombienne

$$I_2(r) = -\hbar\frac{\beta}{r}, \quad (36)$$

β étant un coefficient numérique.

Nous supposerons d'abord $U(r)=0$, $I_1(r)=0$. Le système (21) se ramène à

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{j}{r}\right)G-\frac{\beta}{r}K-\frac{M}{\hbar}F=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{j}{r}\right)K-\frac{\beta}{r}G-\frac{M}{\hbar}H=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{j}{r}\right)F+\frac{\beta}{r}H+\frac{N}{\hbar}G=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{j}{r}\right)H+\frac{\beta}{r}F+\frac{N}{\hbar}K=0, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Nous chercherons une solution de ce système de la forme

$$K = uG,\qquad H = vF. \quad (38)$$

On voit immédiatement que ceci n'est possible que si nous avons

$$u = v = \text{const.} = u_0. \quad (39)$$

Le système (37) se réduit alors aux deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{j+\beta u_0}{r}\right)G-\frac{M}{\hbar}F=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{j+\beta u_0}{r}\right)F+\frac{N}{\hbar}G=0, \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

u_0 étant déterminé par l'équation

$$u_0^2+\frac{2j}{\beta}u_0-1=0, \quad (41)$$

d'où

$$u_0=\frac{1}{\beta}\left(-j+\varepsilon\sqrt{j^2+\beta^2}\right)\qquad(\varepsilon=\pm 1). \quad (42)$$

Nous poserons

$$j'=\sqrt{j^2+\beta^2}. \quad (43)$$

F et G seront déterminés par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r}-\varepsilon\frac{j'}{r}\right)G-\frac{M}{\hbar}F=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial r}+\varepsilon\frac{j'}{r}\right)F+\frac{N}{\hbar}G=0, \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

et nous aurons

$$K=\frac{1}{\beta}(-j+\varepsilon j')G,\qquad H=\frac{1}{\beta}(-j+\varepsilon j')F. \quad (45)$$

Si nous avons $U(r)=\text{const.}$, $I_1(r)=\text{const.}$, ces constantes pouvant d'ailleurs être nulles, auquel cas le seul potentiel est le potentiel pseudoscalaire (36), le système (44), se ramène aux équations (29) avec ici j' au lieu de j et

$$\lambda^2=\frac{MN}{\hbar^2}=\frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{W}{c}+U\right)^2-(m_0c+I_1)^2\right]. \quad (46)$$

Nous obtenons alors immédiatement la solution du système (37) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} F &= c_0\sqrt{\lambda r}\,Z_{j'+\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ G &= -c_0\frac{\hbar\lambda}{N}\sqrt{\lambda r}\,Z_{j'-\frac{1}{2}}(\lambda r),\\ K &= \frac{1}{\beta}(-j+\varepsilon j')G,\\ H &= \frac{1}{\beta}(-j+\varepsilon j')F. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Cette solution nous montre qu'il n'existe pas de spectre discontinu pour l'énergie du corpuscule de Dirac dans un potentiel pseudo-scalaire en $\frac{1}{r}$.

La méthode précédente va nous permettre d'examiner les modifications apportées aux niveaux d'énergie et aux fonctions d'ondes des cas du potentiel électrostatique coulombien ou du potentiel scalaire

coulombien lorsque le corpuscule est également couplé avec un potentiel pseudo-scalaire en $\frac{1}{r}$.

Considérons donc le système (21) avec les potentiels

$$U(r) = \frac{\hbar\alpha}{r}, \qquad I_1(r) = \frac{\hbar\gamma}{r}, \qquad I_2(r) = \frac{\hbar\beta}{r}, \qquad (48)$$

α, β, γ étant des constantes numériques et posons

$$w = \frac{W}{\hbar c}, \qquad \mu_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}. \qquad (49)$$

Le système (37) se ramène à la forme (40) qui s'écrit ici

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon j'}{r}\right)G - \left(w + \mu_0 + \frac{\alpha+\gamma}{r}\right)F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon j'}{r}\right)F + \left(w - \mu_0 + \frac{\alpha-\gamma}{r}\right)G = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Pour résoudre ce système, nous suivrons la méthode de Darwin.

L'examen de (50) nous montre qu'asymptotiquement les fonctions F et G se comportent comme les solutions de

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (w^2 - \mu_0^2)u = 0 \qquad (51)$$

ce qui amène à distinguer deux cas selon que $W^2 - \mu_0^2 < 0$ ou $W^2 - \mu_0^2 > 0$. Considérons le 1[er] cas correspondant aux états liés de la particule et soit

$$\mu_0^2 - w^2 = \varkappa^2 \qquad (\varkappa \text{ réel}). \qquad (52)$$

Nous avons la solution asymptotique acceptable

$$G \sim e^{-\varkappa r}, \qquad F \sim e^{-\varkappa r}$$

et nous écrivons

$$G = \sum_s r^s G_s e^{-\varkappa r}, \qquad F = \sum_s r^s F_s e^{-\varkappa r}. \qquad (53)$$

Nous obtenons alors à partir des équations (50) les relations de récurrence entre coefficients G_s, F_s, G_{s+1}, F_{s+1}

$$\left.\begin{aligned} &(s + 1 - \varepsilon j')G_{s+1} \\ &\quad - (\alpha + \gamma)F_{s+1} - \varkappa G_s - (w + \mu_0)F_s = 0, \\ &(s + 1 + \varepsilon j')F_{s+1} \\ &\quad + (\alpha - \gamma)G_{s+1} - \varkappa F_s + (w - \mu_0)G_s = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

qui nous donnent entre F_s et G_s la relation

$$\begin{aligned} &[(s - \varepsilon j')\varkappa - (\alpha - \gamma)(w + \mu_0)]G_s \\ &\quad - [(\alpha + \gamma)\varkappa + (s - \varepsilon j')(w + \mu_0)]F_s = 0. \end{aligned} \qquad (55)$$

Si les développements de G et de F commencent pour $s = s_0$, $G_{s_0} \neq 0$, $F_{s_0} \neq 0$, $G_{s_0-1} = F_{s_0-1} = 0$ nous devons avoir

$$s_0^2 = j'^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = j^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \qquad (56)$$

Si les développements de G et de F s'arrêtent supérieurement pour un indice s'

$$s' = n + s_0 = n + \sqrt{j^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \qquad (57)$$

nous avons pour cet indice

$$F_{s'} \neq 0, \qquad G_{s'} \neq 0, \qquad F_{s'+1} = G_{s'+1} = 0,$$

d'où

$$\varkappa s' - \alpha w + \mu_0\gamma = 0. \qquad (58)$$

Ceci nous détermine w par l'équation

$$w^2(s'^2 + \alpha^2) - 2w\mu_0\alpha\gamma + \mu_0^2(\gamma^2 - s'^2) = 0, \qquad (59)$$

d'où

$$\frac{w}{\mu_0} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha^2 + s'^2} \pm \frac{s'}{\alpha^2 + s'^2}\sqrt{s'^2 + \alpha^2 - \gamma^2}. \qquad (60)$$

Cette expression des niveaux d'énergie se simplifie dans quelques cas particuliers :

Nous voyons sur l'expression (60) que le potentiel pseudoscalaire en $\frac{1}{r}$ n'introduit qu'un déplacement des niveaux existant dans le cas des interactions électrostatiques en $\frac{\alpha}{r}$ ou scalaires en $\frac{\gamma}{r}$. Si $\alpha = \gamma = 0$ les niveaux disparaissent.

Si les interactions électrostatique et pseudoscalaire interviennent seules ($\gamma = 0$; $\alpha, \beta \neq 0$), les niveaux sont déterminés par la relation

$$\frac{w}{\mu_0} = \pm\frac{s'}{\sqrt{s'^2 + \alpha^2}} = \pm\left(1 + \frac{\alpha^2}{(n + \sqrt{j^2 + \beta^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (61)$$

Si les interactions scalaire et pseudoscalaire interviennent seules ($\alpha = 0$; $\beta, \gamma \neq 0$), on a

$$\begin{aligned} \frac{w}{\mu_0} &= \pm\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{s'^2}} \\ &= \pm\left(1 - \frac{\gamma^2}{(n + \sqrt{j^2 + \beta^2 + \gamma^2})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad (62)$$

4. **Cas du potentiel $I_2(r)$ quelconque.** — Nous allons maintenant revenir au cas où $I_2(r)$ est une fonction arbitraire de r.

L'examen du système (21) nous conduit à rechercher les conditions pour que nous puissions écrire

$$K = u_0 F, \qquad H = v_0 G, \qquad (63)$$

u_0 et v_0 étant des constantes.

Le système (21) se ramène dans ce cas à la forme

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G - \frac{1}{\hbar}(M - I_2 u_0)F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F + \frac{1}{\hbar}(N - I_2 v_0)G = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)F - \frac{1}{\hbar u_0}(M v_0 - I_2)G = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right)G + \frac{1}{\hbar v_0}(N u_0 - I_2)F = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Pour que ces équations soient compatibles, nous devons avoir

$$M v_0 + N u_0 = I_2(u_0 v_0 + 1). \qquad (65)$$

Dans le cas où $U(r) = 0$, $I_1(r) = 0$, M, N, u_0, v_0 sont des constantes et, par suite, nous devons avoir

$$1 + u_0 v_0 = 0, \qquad M v_0 + N u_0 = 0, \qquad (66)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \varepsilon \sqrt{\frac{W + m_0 c^2}{W - m_0 c^2}}, \\ v_0 &= -\frac{N}{M} u_0 = -\varepsilon \sqrt{\frac{W - m_0 c^2}{W + m_0 c^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Le système (64) se ramène alors aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) G - \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + \mu_0 c - u_0 I_2(r)\right] F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F + \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} - \mu_0 c - v_0 I_2(r)\right] G = 0, \\ &K = u_0 F, \qquad H = v_0 G, \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

avec les expressions (67) de u_0 et de v_0.

On peut également chercher les conditions sous lesquelles le procédé utilisé ici s'étend au cas où il existe simultanément avec $I_2(r)$ des potentiels $I_1(r)$ et $U(r)$.

La condition de compatibilité (65) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} &\frac{W}{c}(u_0 + v_0) - m_0 c (u_0 - v_0) \\ &\quad = I_2(1 + u_0 v_0) - U(u_0 + v_0) + I_1(u_0 - v_0). \qquad (69) \end{aligned}$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si nous avons

$$I_2(r) = \beta \varphi(r), \qquad U(r) = \alpha \varphi(r), \qquad I_1(r) = \gamma \varphi(r) \qquad (70)$$

en introduisant pour les trois types d'interaction une seule fonction radiale $\varphi(r)$.

Les constantes u_0 et v_0 sont alors déterminées par les deux relations

$$\left.\begin{aligned} &u_0\left(\frac{W}{c} - m_0 c\right) + v_0\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right) = 0, \\ &\beta(1 + u_0 v_0) - \alpha(u_0 + v_0) + \gamma(u_0 - v_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Avec ces valeurs de u_0 et v_0 le système (64) se ramène aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{r}\right) G \\ &\quad - \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} + m_0 c + \varphi(r)(\alpha + \gamma - \beta u_0)\right] F = 0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right) F \\ &\quad + \frac{1}{\hbar}\left[\frac{W}{c} - m_0 c + \varphi(r)(\alpha - \gamma - \beta v_0)\right] G = 0, \\ &K = u_0 F, \qquad H = v_0 G. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

On peut retrouver facilement sur ces équations dans le cas particulier où $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ les résultats du paragraphe 3.

Manuscrit reçu le 16 mars 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] FURRY W. H. — *Phys. Rev.*, 1936, **50**, 784; PAIS. — *Phys. Rev.*, 1945, **68**, 227; CALDIROLA P. — *Nuovo Cimento*, n° 1, février 1948, **5**, 1-7; PETIAU G. — *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 264-274.
[2] DARWIN G. — *Proceed Roy. Soc.*, 1928, A **118**, 654.
[3] BETHE H. A. — *Handbuch der Physik*, 24/1, p. 301-24.
[4] JEFFREYS H.— Methods of Mathematical Physics, p. 601.

EXPOSÉS ET MISES AU POINT BIBLIOGRAPHIQUES

DIFFUSION RAYLEIGH DE LA LUMIÈRE PAR LES SOLIDES

Par Mlle L. TAUREL et J. P. CHAPELLE.
Faculté des Sciences de Nancy.

Sommaire. — Les questions examinées dans cette mise au point sont les suivantes :

1. Théories « continues » de la diffusion de la lumière par les solides : *a.* Fréquences des radiations diffusées; *b.* Intensité et facteurs de dépolarisation.
2. Théories moléculaires de la diffusion de lumière par les solides.
3. Méthodes expérimentales.
4. Revue bibliographique.

L'étude expérimentale de la diffusion Rayleigh par les corps solides présente de grosses difficultés. C'est la raison pour laquelle depuis 1928, date de la découverte de l'effet Raman, jusqu'à ces dernières années, peu de travaux ont été consacrés à cette question. Notre but est de préciser l'état actuel du sujet, tant du point de vue théorique qu'à celui des méthodes expérimentales utilisées. Cet exposé succinct est suivi d'une étude bibliographique des divers travaux parus avant le mois de décembre 1950.

I. — Théories « continues » de la diffusion de la lumière par les solides.

On montre facilement qu'un corps solide parfaitement homogène ne diffuse pas de lumière. La diffusion peut provenir :

a. De tensions internes ou d'une structure irrégulière du réseau des corps cristallisés. A cette cause correspondent des radiations diffusées de même longueur d'onde que la radiation excitatrice. Nous supposerons que ce phénomène, dit de « fausse diffusion », est provisoirement absent;

b. Des ondes d'agitation thermique qui sillonnent le corps solide et produisent des fluctuations de constante diélectrique. C'est le phénomène dit de « diffusion moléculaire » que nous allons étudier. Nous supposerons par la suite avoir affaire à un monocristal, le cas des corps amorphes n'étant qu'un cas particulier de ceux que nous envisagerons.

1. **Fréquence des radiations diffusées.** — *a. Théorie classique élémentaire.* — Dès 1922 [1], Brillouin a pensé qu'une onde lumineuse tombant sur un plan d'onde élastique devait être réfléchie par lui. L'application d'un raisonnement analogue à celui de la diffraction des rayons X par un réseau cristallin l'a conduit à montrer que la seule longueur d'onde élastique Λ qui produit des effets qui ne se détruisent pas par interférences est liée à la longueur d'onde lumineuse λ par la relation

$$\lambda = 2\Lambda \sin\frac{\theta}{2}, \qquad (1)$$

θ étant l'angle de diffusion.

On peut également le montrer de la façon suivante : supposons qu'une onde plane, dont la normale est

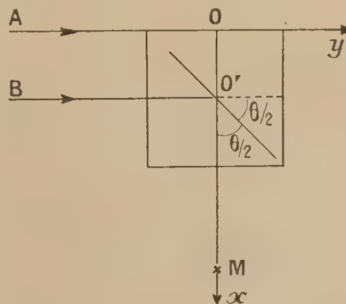


Fig. 1. — Réflexion de la lumière sur les plans d'onde élastiques.

parallèle à OY (*fig.* 1) tombe sur le tube cristallin dessiné. Étudions la lumière diffusée suivant OX qui fait avec OY l'angle θ, que nous supposerons égal à $\frac{\pi}{2}$.

Pour simplifier les choses, nous supposerons les rayons incidents et diffusés choisis de manière que le phénomène de biréfringence soit absent.

Schématiquement, on peut dire que l'intensité lumineuse diffusée en M provient du rayonnement des divers moments induits situés sur le segment de droite OO'.

Soit $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t$ le vecteur champ électrique

de l'onde incidente en un point quelconque de la droite OX. Le moment induit en un point O' tel que OO' = x est lié au champ électrique par la relation tensorielle

$$\vec{M} = [\alpha]\vec{E}.$$

On peut poser

$$[\alpha] = [T] + 2[T'] \cos 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}}\right)$$

N, fréquence de l'onde acoustique;
Λ, longueur d'onde acoustique.

D'où

$$\vec{M} = [T]\vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t + 2[T']E_0 \cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}}\right),$$

$$\vec{M} = [T]\vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t + [T'] \cos 2\pi\left[(N+\nu)t - \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}}\right] + [T'] \cos\left[(\nu - N)t + \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}}\right],$$

On voit ainsi apparaître, en dehors de la fréquence ν, les deux fréquences voisines

$$\nu' = \nu \pm N. \quad (2)$$

En un point M situé à une distance l de O, l'onde diffusée possède un champ électrique égal, à une constante près, à

$$[T]\vec{E}_0 \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{l-x}{\lambda}\right) + [T'] \cos 2\pi\left[(N+\nu)t - \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}} - \frac{l-x}{\lambda}\right] + [T'] \cos 2\pi\left[(\nu - N)t + \frac{x}{\Lambda\sqrt{2}} - \frac{l-x}{\lambda}\right].$$

Il est facile, en associant les centres émissifs par paires séparées d'une demi-longueur d'onde lumineuse, de montrer que la somme des premiers termes de l'expression précédente s'annule. Ils correspondent à la diffusion par un cristal homogène.

La somme des seconds termes fournit un maximum lorsque $\lambda = \Lambda\sqrt{2}$, ce qui est bien la relation (1).

Lorsque cette même relation est vérifiée, et qu'on envisage la même onde se propageant en sens inverse, les troisièmes termes fournissent également un maximum.

Les relations (1) et (2) conduisent à l'expression équivalente

$$\pm \frac{\Delta\nu}{\nu} = \mp \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{2v}{V} \sin\frac{\theta}{2}, \quad (3)$$

$\Delta\nu$ et $\Delta\lambda$, variation de fréquence ou de longueur d'onde de l'onde diffusée;
v, vitesse de propagation de l'onde élastique;
V, vitesse de propagation de la lumière.

La relation (3) peut s'établir directement en admettant que les plans réfléchissants en mouvement produisent un effet Döppler.

On voit donc que, lorsque l'angle θ de diffusion est fixé, les ondes élastiques actives ont une orientation et une longueur d'onde bien déterminées.

On sait qu'une longueur d'onde d'orientation donnée se propageant dans un cristal dont le motif cristallin contient N atomes peut transporter deux groupes de vibrations [2] :

3 (N — 1) fréquences assez élevées, dont la valeur limite n'est pas nulle lorsque la longueur d'onde augmente indéfiniment : ces valeurs constituent les fréquences optiques du cristal; elles sont responsables de la diffusion Raman;

Trois fréquences relativement basses, dites acoustiques, dont la valeur limite est nulle lorsque la longueur d'onde augmente indéfiniment. Leurs vitesses de propagation, dans le domaine des longueurs d'ondes visibles, est sensiblement la même que pour la longueur d'onde infinie : ce sont les vitesses de propagation du son dans la direction envisagée. Ces trois ondes acoustiques sont responsables de la diffusion Rayleigh. On doit donc prévoir, de part et d'autre de la raie excitatrice, théoriquement absente, trois « doublets Brillouin », écartés de 1/10e à quelques cm^{-1} de la fréquence excitatrice.

b. Théorie quantique. — Les formules précédentes se retrouvent simplement lorsqu'on suppose [4] que la lumière diffusée résulte d'un choc élastique entre

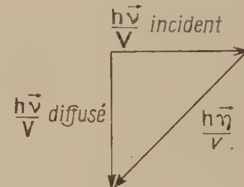


Fig. 2. — Conservation des quantités de mouvement.

un photon et un phonon. L'application du principe de la conservation de l'énergie fournit la relation

$$h\nu_{\text{diffusé}} = h\nu_{\text{incident}} \pm hN.$$

L'application du principe de la conservation des quantités de mouvement conduit à

$$\frac{h\vec{\nu}_{\text{diffusé}}}{V} = \frac{h\vec{\nu}_{\text{incident}}}{V} \pm \frac{h\vec{N}}{v}.$$

Lorsqu'on suppose $\nu_{\text{diffusé}} \neq \nu_{\text{incident}}$, on retrouve les résultats précédents : réflexion sur les plans d'ondes élastiques, formule (1) et (3).

On pourrait d'ailleurs imaginer des chocs multiples conduisant à un spectre du second ordre. Les règles de sélection imposées par les phénomènes d'interférences ne sont plus valables et l'on doit observer un spectre continu [23].

c. Théorie classique rigoureuse. — La théorie exposée en *a.* repose sur une hypothèse arbitraire. La théorie quantique s'appuie, elle aussi, sur une hypothèse : celle d'un faible écart entre les fréquences incidentes et diffusées.

Une théorie rigoureuse consiste à appliquer les équations de Maxwell à un milieu troublé [1] ou, plus exactement, à un milieu dont les constantes diélectriques subissent des variations périodiques [10].

On retrouve alors les conditions quantiques précédentes, à condition d'admettre que l'intensité est

assez faible pour que l'absorption de l'onde incidente soit négligeable. Cette approximation, sûrement valable pour les ondes d'agitation thermique, ne l'est plus pour les ondes d'origine ultrasonore, ce qui a pour effet de rendre l'étude de la diffraction de la lumière par les ultrasons beaucoup plus compliquée que celle de la diffusion Rayleigh par les cristaux.

Il convient de noter que l'étude précédente conduit, dans le cas d'un milieu anisotrope, à appliquer le principe de la conservation des quantités de mouvement aux normales aux ondes acoustiques et lumineuses.

2. Intensité et facteur de dépolarisation des radiations diffusées. — Le principe consiste à déterminer pour chaque onde active le tenseur dérivé des polarisabilités T' défini en I.

On utilise le fait que, lorsqu'en l'absence de déformations l'ellipsoïde des indices relatif à un élément de volume est

$$a^0_{xx}x^2 + a^0_{yy}y^2 + a^0_{zz}z^2 - 2a^0_{yz}yz - 2a^0_{zx}zx - 2a^0_{xy}xy = 1,$$

au cours de la propagation d'une onde élastique, ses coefficients deviennent

$$a_{xx} = a^0_{xx} + p_{11}x_x + \dots + p_{16}x_y,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$a_{yx} = a^0_{yx} + p_{61}x_x + \dots + p_{66}x_y.$$

Les p_{ik} constituent les constantes élastooptiques de Pockels [24]. Les x_n, sont les déformations du milieu.

Les variations de ces coefficients étant faibles, on peut montrer [5] qu'il existe, pour les suceptibilités électriques du milieu, les relations approximatives

$$k_{xx} - k^0_{xx} = (p_{11}x_x + \dots + p_{16}x_y)\frac{n^4}{4\pi},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$k_{xy} - k^0_{xy} = (p_{61}x_x + \dots + p_{66}x_y)\frac{n^4}{4\pi},$$

où n représente l'indice moyen du cristal.

Les termes du type $k_{xx} - k^0_{xx}$ constituent les coefficients du tenseur $2(T')\cos 2\pi Nt$, cherché.

En écrivant que la densité de l'énergie de l'onde acoustique est égale à kT [7], on détermine l'amplitude de cette onde et le tenseur (T') est alors complètement connu.

L'expression ainsi obtenue suffit à déterminer les facteurs de dépolarisation.

La détermination de la valeur absolue de l'intensité diffusée s'obtient aisément, en appliquant la formule du rayonnement du dipole [25].

Il découle de ce qui précède qu'on trouve une intensité diffusée proportionnelle à la température absolue.

II. — Théories moléculaires de la diffusion de la lumière par les solides.

Le seul travail qui, à notre connaissance, ait été effectué est celui de J. Barriol [7]. Nous indiquons ci-dessous les intensités auxquelles sa théorie et la précédente conduisent dans le cas de Na Cl; la direction d'éclairement est l'axe quaternaire OY; celle de diffusion l'axe quaternaire OX.

	Théorie continue.				Théorie moléculaire.			
Champ électrique incident parallèle à...	OZ.		OX.		OZ.		OX.	
Intensités diffusées...	i(OY).	I(OZ).	i(OY)	I(OZ).	i(OY).	I(OZ).	i(OY).	I(OZ).
Onde de vitesse $V_1 = \sqrt{\frac{c_{11}+c_{12}+2c_{44}}{\rho}}$...	0	7,24	0,023	0	0	12,96	1,44	0
» $V_2 = \sqrt{\frac{c_{11}-c_{12}}{2\rho}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
» $V_3 = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	0,038	0	0	0,038	2,06	0	0	2,06

L'accord est donc réalisé qualitativement; selon l'auteur, les polarisabilités des ions ont été évaluées de façon trop grossière; une étude plus précise est en cours.

III. — Méthodes expérimentales.

1. Détermination des fréquences de diffusion. — L'écart des composantes Brillouin étant faible, le choix des nombreux expérimentateurs [17], [18], [19] s'est porté sur des appareils interférentiels à haut pouvoir de résolution : lames de Pérot et Fabry, échelon de Michelson, lame de Lummer et Gelucke.

Du fait de l'existence possible de six fréquences, l'interprétation des clichés obtenus est difficile. Par ailleurs, la faible luminosité des appareils utilisés exige des poses longues au cours desquelles la température et la pression doivent rester constantes. Il serait souhaitable que des expériences soient reprises avec les interféromètres beaucoup plus lumineux construits ces dernières années [26]. On aurait là une excellente méthode de détermination des constantes élastiques.

Plus récemment, l'école hindoue [20], [21], [22] a utilisé des spectrographes très dispersifs dans l'ultraviolet. L'emploi de la raie de résonance du Hg 2534 Å, absorbée sur le faisceau diffusé, permet d'éliminer toute diffusion parasite. Les résultats expérimentaux concordent avec les prévisions théoriques, à la précision des mesures près, qui ne dépasse pas le 1/10e. Malheureusement, à l'aide d'une telle méthode, la mesure des intensités est assez difficile; celle des facteurs de dépolarisation à peu près impossible.

2. **Détermination des intensités et des facteurs de dépolarisation.** — Il est nécessaire d'utiliser un spectrographe et non un appareil photographique, afin d'éliminer l'influence des fréquences Raman.

Pour éliminer la « fausse diffusion » et l'influence de la lumière parasite, deux méthodes sont possibles :

a. Utiliser comme raie excitatrice une raie de résonance qu'on peut absorber sur le faisceau diffusé. Pratiquement, on a le choix entre :

la raie de résonance du Hg 2534 Å, avec toutes les complications que comporte le travail dans l'ultraviolet;

la raie jaune du sodium, qui conduit à une diffusion peu intense, étant donné la faible brillance des sources généralement utilisées;

b. Travailler en fonction de la température. La courbe donnant les intensités en fonction de la température est une droite ne passant pas par l'origine.

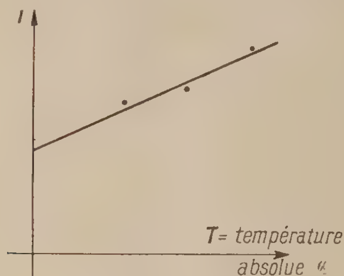


Fig. 3. — Intensité diffusée en fonction de la température.

On peut ainsi évaluer la fraction de « fausse diffusion » se trouvant dans la lumière reçue, si l'on admet que cette fraction est indépendante de la température.

Bien entendu, les précautions classiques relatives à l'étude d'un rayonnement faible doivent être réalisées [27].

Le travail le plus important réalisé avec une telle technique est celui de Matossi [6]. Il n'a pas conduit à des résultats concluants, faute à notre avis, de conditions d'observation assez variées.

IV. — Conclusions.

Du point de vue théorique, la diffusion de la lumière par un milieu continu a été étudiée; la théorie moléculaire, bien qu'ayant déjà fourni des résultats intéressants, a besoin d'être améliorée.

Du point de vue expérimental, la diffusion « moléculaire » de la lumière par les solides est maintenant mise en évidence. Par contre, l'étude des intensités diffusées n'est qu'à peine amorcée.

Nous pensons, en outre, que la « fausse diffusion » peut être mise en évidence avec de gros monocristaux fournissant très peu de lumière parasite.

Elle doit permettre de préciser les idées que l'on possède sur la structure réelle des cristaux.

Enfin, l'étude de la diffusion par un cristal au voisinage du point de fusion ou d'un point de transsition de second ordre, doit contribuer à l'étude du mécanisme de ces deux phénomènes.

Note : Calcul des vitesses de propagation du son dans un milieu anisotrope.

Nous pensons utile de rappeler qu'étant donné l'onde plane acoustique

$$u = A\,e^{j\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right)},$$

$$v = B\,e^{j\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right)},$$

$$w = C\,e^{j\omega\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}\right)},$$

où α, β, γ représentent les cosinus directeurs de sa direction de propagation, il est nécessaire qu'on ait entre A, B, C, les trois relations

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda_{11} - \rho v^2) + B\lambda_{12} + C\lambda_{13} &= 0,\\ A\lambda_{12} + B(\lambda_{22} - \rho v^2) + C\lambda_{23} &= 0,\\ A\lambda_{13} + B\lambda_{23} + C(\lambda_{33} - \rho v^2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les λ sont des formes homogènes du second degré des cosinus directeurs. Ils sont fournis par le tableau suivant :

	α^2.	β^2.	γ^2.	$\alpha\beta$.	$\beta\gamma$.	$\gamma\alpha$.
λ_{11}...	C_{11}	C_{66}	C_{55}	$2C_{16}$	$2C_{56}$	$2C_{15}$
λ_{22}...	C_{66}	C_{22}	C_{44}	$2C_{26}$	$2C_{24}$	$2C_{46}$
λ_{33}...	C_{55}	C_{44}	C_{33}	$2C_{45}$	$2C_{34}$	$2C_{35}$
λ_{12}...	C_{16}	C_{26}	C_{45}	$(C_{12}+C_{66})$	$(C_{25}+C_{46})$	$C_{14}+C_{56}$
λ_{23}...	C_{56}	C_{24}	C_{34}	$C_{25}+C_{46}$	$C_{23}+C_{44}$	$C_{36}+C_{45}$
λ_{13}...	C_{15}	C_{46}	C_{35}	$C_{14}+C_{56}$	$C_{36}+C_{45}$	$C_{13}+C_{55}$

où les C représentent les constantes élastiques du corps étudié.

Par exemple

$$\lambda_{11} = C_{11}\alpha^2 + C_{66}\beta^2 + C_{55}\gamma^2 + 2C_{16}\alpha\beta + 2C_{56}\beta\gamma + 2C_{15}\gamma\alpha.$$

Les équations (1) fournissent l'équation aux vitesses, ainsi que les valeurs relatives des composantes A, B, C de l'amplitude de l'onde.

Manuscrit reçu le 1er mars 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — *Ouvrages généraux.*

[1] Brillouin L. — La diffraction de la lumière par les ultrasons, Actualités scientifiques, n° 59, Hermann, Paris, 1933. — Applique les équations de Maxwell au cas où la lumière se propage dans un milieu isotrope troublé.

[2] Rousset A. — La diffusion de la lumière par les molé-

cules rigides, Édition du C. N. R. S., 1947. — Indique les conditions générales de la diffusion Rayleigh par les cristaux.

II. — *Publications partiellement ou totalement théoriques.*

[3] Ganz. — *Ann. Physik*, 1925, **77**, 317. — Établit des formules donnant la lumière diffusée par un corps isotrope.

[4] Tamm. — *Z. Physik*, 1930, **60**, 345. — Indique les conditions quantiques de la diffusion.

[5] Leontowich et Mandelstam. — *Physik. Z. Sowiet Union*, 1932, **1**, 317. — Calcul de l'intensité totale diffusée par un cristal cubique éclairé et diffusant suivant un axe quaternaire

$$I = \frac{\pi^2}{2\lambda^4} k T n^8 \left[\frac{2 p_{12}^2 + p_{44}^2}{C_{11} + C_{12} + 2 C_{44}} + \frac{p_{44}^2}{C_{44}} \right].$$

Cette formule a été employée par erreur dans de nombreuses études expérimentales quelle que soit l'orientation du cristal cubique. Dans ce travail, les auteurs envisagent toutes les ondes qui se propagent dans le cristal. Leur destruction par interférence se produit au cours du calcul.

[6] Matossi. — *Z. Physik*, 1934, **92**, 425. — Mémoire important, comportement une bibliographie à peu près complète. L'auteur étend à de nombreux systèmes cristallins la théorie développée en [5]. Description détaillée du dispositif expérimental utilisé; élimine la fausse diffusion en travaillant à température variable. Résultats expérimentaux : verre, aucune diffusion moléculaire; Na Cl, aucune diffusion moléculaire. Signale qu'un seul échantillon a permis aux auteurs russes de mettre en évidence la diffusion moléculaire de ce cristal; quartz, manifeste la diffusion moléculaire. Vérification des formules théoriques à 20 pour 100 près; Calcite, vérification qualitative des formules théoriques; topaze, aucune diffusion moléculaire.

[7] Barriol J. — *J. Physique Rad.*, 1947, série VIII, **8**, 327. — Généralise la méthode utilisée par Laval pour l'étude de la diffusion des rayons X par les cristaux; montre qu'il s'introduit une autre cause de diffusion liée aux fluctuations du champ moléculaire dues à l'agitation thermique. L'auteur précise un certain nombre de points dans une publication du C. N. R. S. (1949): *Colloque sur la diffusion de la lumière.*

[8] Kastler A. — *Colloque sur la diffusion de la lumière*, édition C. N. R. S., 1949. — Étudie qualitativement les caractères de polarisation de la lumière diffusée par un cristal cubique en fonction des déformations que les ondes élastiques font subir à l'ellipsoïde des réfractivités.

[9] Chapelle J. et Gally A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **231**, 868. — Traitement quantitatif du problème étudié en [8] les formules obtenues sont en accord avec [5].

[10] Motulevich. — *C. R. Acad. des Sc. U. S. S. R.*, 1947, **2**, 390 (indiqué par les *Phys. Abstracts* d'octobre 1950). — Applique les équations de Maxwell à un milieu anisotrope, sillonné par des ondes acoustiques. Par l'introduction de charges et de courants fictifs, se ramène à des expressions de type connu. Indique les valeurs auxquelles on doit s'attendre pour le quartz et Na Cl. Résultats expérimentaux concordant avec la théorie pour le rapport des intensités totales diffusées. Étude expérimentale de l'intensité de diffusion en fonction de l'orientation, élimination de la fausse diffusion par une étude à température variable; pour deux échantillons de quartz, les résultats expérimentaux sont les suivants :

$$\frac{I_z}{I_y} \Big/ \frac{I_y}{I_x} = \frac{1{,}24}{1} \Big/ \frac{1}{0{,}98}, \qquad \frac{I_z}{I_y} \Big/ \frac{I_y}{I_x} = \frac{1{,}28}{1} \Big/ \frac{1}{0{,}97}.$$

La valeur théorique étant

$$\frac{I_z}{I_y} \Big/ \frac{I_y}{I_x} = \frac{1{,}32}{1} \Big/ \frac{1}{0{,}99}.$$

(OZ, axe ternaire, OX, axe binaire).

Pour le sel gemme, il compare les intensités de la diffusion moléculaire du sel gemme et du quartz orientés de façon déterminée

$$\left(\frac{I_{\text{NaCl}}}{I^x_{\text{Quartz}}} \right) = 1{,}00$$

la théorie indique le résultat 1,07.

[11] Motulevich et Tourovtsava. — *J. Exp. Théor. Phys., U. S. S. R.*, 1950, **20**, 334. — Calculent les résultats auxquels on doit s'attendre dans le cas de la calcite. Les résultats expérimentaux sont en assez bon accord avec la théorie :

$$1{,}78 < \frac{I^z_M}{I^x_M} < 1{,}82, \qquad \text{valeur théorique : } 1{,}8.$$

(Oz, axe ternaire; Ox axe binaire).

Les résultats discordants sont attribués à la lumière parasite. Les auteurs considèrent le problème comme résolu. (Opinion déjà formulée en 1928 [14].)

III. — *Publications purement expérimentales.*

[12] Strutt. — *Proc. Roy. Soc.*, 1919, **95**, 476. — Étude qualitative de la lumière diffusée par le verre et le quartz. Vraisemblablement « fausse diffusion ».

[13] Landsberg. — *Z. Physik*, 1927, **43**, 773. — Description du dispositif expérimental utilisé pour la diffusion Rayleigh du quartz. Étude qualitative de l'influence de la température.

[14] Landsberg. — *Z. Physik*, 1927, **45**, 442. — Étude quantitative de l'influence de la température sur la diffusion par le quartz. Montre l'existence d'une fraction d'intensité diffusée proportionnelle à la température absolue.

[15] Landsberg et Leontowitsch. — *Z. Physik*, 1929, 439. — A la suite de la découverte de l'effet Raman, trouvent que les raies Raman Stokes représentent 40 pour 100 de la diffusion Rayleigh, leur intensité ne dépend pratiquement pas de la température. L'intensité de la raie Rayleigh est proportionnelle à la température absolue. L'intensité des raies antistokes augmente très rapidement en fonction de la température.

[16] Landsberg et Mandelstram. — *Z. Physik*, 1932, **73**, 502. — Étude de la lumière diffusée par Na Cl. Montrent que 50 pour 100 de la lumière diffusée est d'origine moléculaire.

$$I_{\text{NaCl}} \text{ moléculaire} = 1{,}9\, I_{CO_2} \text{ gazeux}.$$

Facteur de dépolarisation, $\rho = 0{,}3$ pour 100; théoriquement, $\rho = 0$.

[17] Gross. — *Z. Physik*, 1930, **63**, 685. — Analyse de la structure fine de la raie 4 358 Å du Hg, diffusée transversalement par un bloc de quartz. Usage d'un échelon à 30 lames de Michelson. On obtient trois doublets. Le plus étroit 0,180 vérifie les prévisions théoriques (0,183 Å), les deux autres seraient dus à des harmoniques.

[18] Raman et Venkateswaran. — *Nature*, 1938, **142**, 250. — Analyse de la structure fine de la raie 4 047 Å du Hg diffusée transversalement par un cristal de gypse; obtention de trois doublets qu'en l'absence de la connaissance des constantes élastiques du gypse on ne peut interpréter.

[19] Krishnan. — *Proc. Indian. Acad. Soc.*, 1945, **22**, 329. — Analyse de la structure fine de la raie 4 358 Å du Hg diffusée transversalement par un bloc de quartz. Usage d'un étalon de Pérot et Fabry. Observe de façon nette les composantes Brillouin dues aux ondes longitudinales pour trois orientations différentes du cristal.

[20] Krishnan et Chandrasekharan. — *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1950, A. **31**, 427. — Description détaillée de la méthode expérimentale utilisant la raie de résonance du Hg pour mettre en évidence spectroscopiquement la structure fine de la raie Rayleigh. Cherche les relations entre la distance des raies Brillouin et l'orientation du cristal, les mesures sont effectuées pour des orientations différentes d'un cristal de quartz. Accord avec les formules théoriques; un seul écart attribué aux erreurs d'expérience. Montre que la largeur de la raie excitatrice et sa structure hyperfine n'entraînent pas de complications. Étude qualitative des variations de l'intensité des raies en fonction de la température.

[21] Krishnan. — *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1947, A. **26**, 450. — Étude des composantes Brillouin dans l'alumine synthétique à l'aide d'un spectrographe Hilger, type E_1; Impossibilité de séparer les différents doublets; on obtient deux raies chacune à une distance de 2,45 cm^{-1} de la raie centrale et larges de 1,8 cm^{-1}.

[22] Krishnan. — *Proc. Indian. Acad. Sc.*, 1947, A. **26**, 399. — Étude à l'aide de la méthode précédente des composantes Brillouin du diamant. Observation des trois doublets théoriques. Considérations sur les intensités qui semblent en désaccord avec la formule établie en [5]. En réalité, la formule ne s'applique qu'approximativement au cas actuel; de plus, les auteurs oublient de faire intervenir le fait que l'on se trouve dans le cas de l'incidence brewstérienne.

[23] Stokhanov. — *J. Exp. théor. Phys. U. R. S. S.*, 1950, 330. — Le spectre Raman du second ordre de KCl montre une bande de 58 cm^{-1} au voisinage de la raie excitatrice.

IV. — *Références se rapportant à l'exposé.*

[24] Pockels. — *Z. Kristallophik*, Teubner, Leipzig, 1906.

[25] Becker. — *Théorie des Elektrizität*, Leipzig, 1933; 1938, B. **11**, 22.

[26] Jacquinot et Dufour. — *J. Phys. Rad.*, 1950, **11**, 427.

[27] Cabannes J. — La diffusion moléculaire de la lumière, Les Presses Universitaires, Paris, 1929.

LETTRES AUX ÉDITEURS

SUR L'EMPLOI DES THERMISTORS

Par Y. DOUCET,
Maître de Conférences à Dijon.

On sait toute la difficulté qu'il y a à mesurer, avec des thermomètres à résistance de platine des différences de température à 10^{-4} ou même 10^{-5} degré près. Se référant à la littérature américaine, on pourrait penser que ces difficultés disparaissent avec l'emploi des thermistors. Depuis quelque temps, on en trouve de nombreux modèles sur les marchés français et anglais. Certains types seulement ont des caractéristiques stables et ne présentent pas, à l'usage, de phénomène de vieillissement.

I. Les meilleurs avec lesquels nous avons expérimenté sont du genre « sonde » ou « F ». C'est une perle logée dans l'extrémité même d'un tube de verre vide d'air. Ils sont directement immergés dans un mélange à 0°, dans des eutectiques et aussi dans des solutions de KCl dans l'eau. La fixité de la température est assurée à 10^{-4} degré près (contrôle par thermocouple d'une centaine d'éléments), par l'usage de récipients adiabatiques et d'une agitation convenable. Les résistances sont mesurées au pont en courant continu. On trouve alors que la précision de la mesure est limitée par des variations brusques et sporadiques qui, pour le modèle le plus stable, sont de l'ordre de ± 0,5 Ω pour des résistances de 7 000 à 10 000 Ω.

Cette précision est insuffisante en thermométrie : le coefficient de température de ce modèle est $\alpha^* = 0{,}0302$. On a $\frac{\mathrm{d}R}{R} = \alpha\,\mathrm{d}T$, ce qui donne $\mathrm{d}T = \pm 0{,}002$. Dans l'intervalle de température envisagé, un bon thermomètre Roberteau donnerait mieux.

II. Le tracé de la courbe $\log R = f\left(\frac{1}{T}\right)$ n'est pas linéaire comme le voudrait la théorie. La condition thermodynamique d'équilibre électronique dans un cristal semi-conducteur est le minimum de la fonction F énergie libre. Nijboer [1] a calculé F. Il arrive à une expression de la forme $R = AT^a e^{\frac{b}{T}}$, où A, a, b sont des constantes indépendantes de T. Aux températures utilisées ci-dessus, a serait nul. Il reste $R = Ae^{\frac{b}{T}}$.

Les hypothèses du calcul ne sont vraisemblablement pas remplies pour le thermistor en expérience puisque, même dans le petit intervalle étudié, des divergences se manifestent. L'équation de la droite « moyenne » est

$$\log R = 0{,}3023 + \frac{975}{T},$$

mais les résultats sont beaucoup mieux représentés si l'on décale l'échelle des abscisses en écrivant

$$\log R = 1{,}37545 + \frac{482{,}13}{T - 80}.$$

Des mesures sont entreprises dans un intervalle de température beaucoup plus large.

III. Le thermistor se prête admirablement bien à la régulation d'un thermostat. La variation de température provoque le déséquilibre d'un pont alimenté par le secteur à 50 p. Le courant amplifié commande, à l'aide d'un thyratron, le circuit de chauffage du thermostat. On obtient ainsi une régulation continue exempte des oscillations inhérentes aux systèmes par relais.

Un collaborateur, P. Chauchefoin, a réalisé un montage inspiré de Vodden [2] pour le montage du thyratron et de R. Aumont [3] pour l'amplificateur et le pont de déphasage. Toutes précautions étant prises pour éliminer les influences perturbatrices, on arrive à maintenir la température d'un bain au voisinage de 30° à une précision qui n'est limitée que par l'instabilité du thermistor, soit 0,002°.

En calorimétrie adiabatique, il est nécessaire de régler deux enceintes à la même température. Le montage avec deux thermistors dans deux branches du pont de mesures doit résoudre le problème. Des essais sont en cours à ce sujet.

[1] NIJBOER. — *Proc. Phys. Soc.*, 1939, **51**, 575.
[2] VODDEN. — *J. Soc. Ch.*, I, 1950, **69**, 51.
[3] AUMONT, *Rev. gén. Électr.*, 1950, **59**, 175.

Manuscrit reçu le 9 août 1951.

ÉTUDE SPECTROMÉTRIQUE DU RAYONNEMENT γ DE As_{76}

Par P. HUBERT,
Attaché de Recherches au C. N. R. S.

Le nuclide As_{76} qui se désintègre par émission β avec une période de 26,7 h, a déjà fait l'objet de nombreux travaux dont on trouvera les références dans les articles [1] de A. Mitchell et [2] de Mmes N. Marty, J. Laberrigue et H. Langevin.

Les résultats obtenus jusqu'à présent n'étant pas parfaitement concordants, il m'a paru intéressant de reprendre l'étude du rayonnement γ accompagnant cette transformation. Ce travail a été effectué avec le spectromètre à lentille magnétique dont j'ai indiqué les principales caractéristiques dans une lettre précédente [3].

Les sources utilisées, d'une intensité de l'ordre de 10 *mc*, étaient fournis par les services du C. E. A.

La figure 1 représente le spectre obtenu avec un radiateur de cuivre. On y distingue quatre distributions caractéristiques dont les limites sont indiquées par des flèches. Seul le rayonnement le plus mou donne un effet photoélectrique notable signalé par une raie élargie. La présence de cette raie a pour

résultat de masquer la distribution d'électrons Compton due au rayonnement γ_2.

La figure 2 représente le spectre obtenu en plaçant sur la capsule de cuivre une pastille de plomb de 50 μ d'épaisseur (courbe *a*) ou de 100 μ (courbe *b*). On distingue six pics correspondant à l'effet photoélectrique

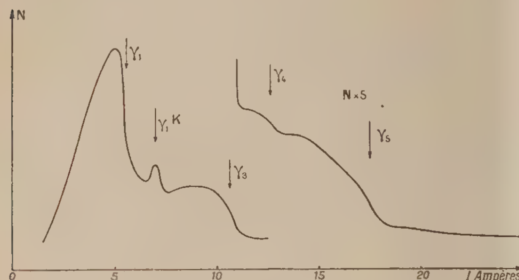


Fig. 1.

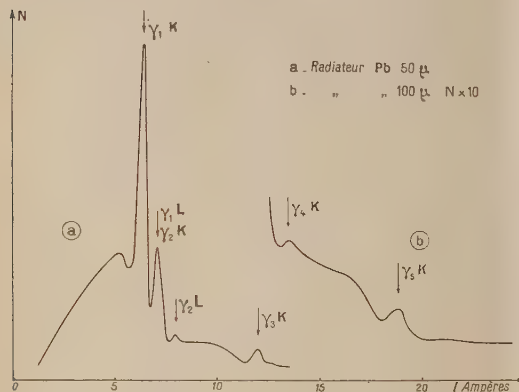


Fig. 2.

dans le plomb de cinq rayons γ différents. Le 3e pic γ_{2L} est attribué à la conversion sur la couche *L* d'un rayonnement γ dont la raie de conversion *K* est confondue avec γ_{1L}. Ce fait a été établi en utilisant, à la place du plomb, des matériaux différents comme l'or et l'uranium.

La décroissance de toutes ces raies a été contrôlée et trouvée conforme à la valeur attendue. Les principaux renseignements sont consignés dans le tableau ci-dessous :

N° du γ.	Énergie (en MeV). Compton.	Photoélectrons.	Intensité relative $\frac{I}{I_1}$. Compton.	Photoélectrons.
1...	0,550	0,555 ± 0,002	1	1
2...	–	0,648 ± 0,002	0,07 ± 0,04	0,095 ± 0,01
3...	1,17	1,210 ± 0,005	0,21 ± 0,04	0,25 ± 0,02
4...	1,4	1,410 ± 0,006	0,014 ± 0,005	0,016 ± 0,004
5...	2	2,06 ± 0,01	0,04 ± 0,01	0,055 ± 0,01

Les valeurs précises des énergies ont été obtenues (sauf pour la raie n° 4 trop peu intense) en utilisant comme radiateur une feuille d'or de 7 mg : cm² afin de réduire les corrections dues à l'épaisseur.

On remarquera l'absence du rayonnement γ de 1,7 ou 1,8 MeV signalé par plusieurs auteurs. En fait, l'aspect étalé de la distribution Compton attribuée à γ_5 suggérerait assez bien l'existence d'un rayonnement possédant cette énergie et d'une intensité voisine de celle de γ_5 ; la distribution Compton observée serait alors la somme des deux. Cette hypothèse a été rejetée, car il n'a été possible dans aucun cas de voir la raie photoélectrique correspondante. En outre, l'intensité relative de γ_5 calculée par effet Compton aurait alors été trop forte par rapport à celle calculée par effet photoélectrique. On voit que c'est plutôt le contraire qui se produit.

La présence de ces cinq raies permet de suggérer, pour la désintégration de As_{76}, le schéma ci-dessous, qui est assez voisin de celui proposé par N. Marty [2] à la suite d'une étude sur la forme du spectre β et sur sa décomposition en droites de Fermi.

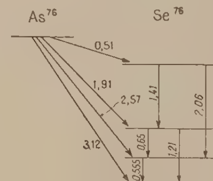


Fig. 3.

Ce travail a été effectué grâce à une bourse du C. N. R. S., sous la direction de M. le Professeur F. Joliot.

[1] MITCHELL A. C. G. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 32.
[2] MARTY N., LABERRIGUE J. et LANGEVIN H. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1722.
[3] HUBERT P. — *J. Physique Rad.*, 1950, **12**, 763.

Manuscrit reçu le 5 juillet 1951.

MESURE RAPIDE DES COEFFICIENTS D'ÉCHANGE DANS LES LIQUIDES BOUILLANTS

Par L. WEIL.

Pour déterminer le coefficient d'échange $\alpha = \frac{P}{\theta}$, *P* étant la puissance cédée par unité de surface d'un élément de θ° plus chaud que le liquide, on fait, en général, des expériences successives avec diverses valeurs de θ.

P peut être fourni électriquement à l'élément chauffant, mais, tout au moins dans le cas de fils [1], on ne peut alors dépasser un écart θ_m, où apparaît la caléfaction. Nous avons donc utilisé, pour fournir l'énergie $Ps\,dt$ la variation $mc_p\,d\theta$ de la chaleur totale de l'élément, de masse *m* et de surface *s*, se refroidissant de dθ. On a donc

$$P = \frac{mc_p}{s}\frac{d\theta}{dt}$$

et il suffit de mesurer θ en fonction de *t* au cours de l'immersion de l'élément, préalablement à la température ambiante, pour avoir en même temps, dans

une *expérience unique* et rapide, tous les éléments qui déterminent $\alpha(\theta)$.

Nous avons appliqué la méthode à la détermination des coefficients d'échange de fils, car nous nous intéressions aux coefficients d'échange de surfaces cylindriques.

La mesure de température a été faite en déterminant la résistance électrique : la différence de potentiel aux bornes de l'élément parcouru par un courant alternatif faible et constant est enregistrée photographiquement à l'oscillographe; on a ainsi un pointé de θ par période.

La résistance varie comme la température moyenne τ. En tenant compte des conditions aux limites et en admettant comme première approximation une répartition parabolique de la température dans le fil, on trouve que

$$\frac{\tau-\theta}{\tau}=\left[\frac{4k}{\alpha r}-1\right]^{-1},$$

r étant le rayon du fil et k la conductibilité thermique : avec un fil de 3 mm de diamètre, l'écart ne dépasse pas 3 pour 100 aux plus grandes valeurs de α rencontrées.

Il y a intérêt à avoir une variation de résistance importante en fonction de la température : nous avons donc donné la préférence pour nos mesures à basse température à un métal ayant une température de Debye aussi basse que possible, c'est-à-dire au plomb.

Enfin, nous avons fait la plupart des expériences avec le courant du secteur; même avec les grandes conductibilités électriques qu'on observe à 20° K, il n'est pas nécessaire, avec un fil de 3 mm, de tenir compte de l'effet de peau.

La méthode a été appliquée, en collaboration avec M. Lacaze, à la mesure des coefficients d'échange dans l'azote liquide, où nous avons vérifié que les résultats ne dépendaient pas du diamètre entre 1 et 3 mm, et dans l'hydrogène liquide. Ces mesures feront l'objet d'une publication indépendante.

[1] Weil L. et Lacaze A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 186.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1951.

LA VARIATION DE LA TENSION SUPERFICIELLE PRÈS DU POINT CRITIQUE. RÔLE DES DENSITÉS DU LIQUIDE ET DE LA VAPEUR SATURANTE

Par C. Bachaud.

Sommaire. — Des mesures de tension superficielle et de densités (liquide et vapeur) au voisinage du point critique, on cherche à déduire si le rapport $\frac{\sigma}{(n_L-n_V)^3}$ tend vers une limite quand la température tend vers la température critique, comme le prévoit la théorie cinétique, en étudiant tour à tour les variations thermiques de chaque terme du rapport.

La vérification de la théorie cinétique de la tension superficielle σ d'un liquide en équilibre avec sa vapeur au voisinage du point critique [1], plus spécialement adaptée aux molécules monoatomiques, exige la discussion expérimentale d'une limite finie pour la quantité $\frac{\sigma}{(n_L-n_V)^3}$ lorsque la température absolue T tend vers la température critique T_c. n_L est la densité moléculaire du liquide en équilibre avec la vapeur de densité n_V.

Craignant que les auteurs, généralement différents, des mesures de densité et de tension superficielle, n'aient opéré sur des échantillons insuffisamment identiques, nous avons étudié séparément σ et n_L-n_V en fonction de T_c-T.

L'incertitude des mesures à l'approche du point critique, le phénomène de Cagniard-Latour, le rôle joué par des traces même minimes d'impuretés, les idées préconçues redressées récemment par Naldrett et Mass [2] sur la forme des courbes représentatives de n_L et n_V en fonction de la température, ont certainement faussé pour le moins de fraction de degré la plupart des déterminations de températures critiques, entraînant de graves erreurs systématiques sur toute discussion du type de celle qui suit. Aussi avons-nous recherché, sur chaque exemple, une nouvelle valeur de T_c, en utilisant la propre série de mesures de σ ou de n_L-n_V qui doit nous servir de test.

D'après Ferguson [3], nous avons recherché une représentation empirique de la tension superficielle de la forme

$$\sigma=K\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^m, \qquad (1)$$

où K et m seraient deux constantes caractéristiques de la substance. Les deux inconnues T_c et m ont été déterminées par approximations successives en adoptant d'abord, à titre provisoire, à la suite des résultats de Ferguson [3] et de Sugden [4] la valeur 1,2 pour toutes les substances.

Pour la plupart des substances étudiées, m s'avère compris entre 1,20 et 1,28 et même pour le benzène, le propylène et l'éther méthylique, étudiés particulièrement près de la température critique, entre 1,20 et 1,21.

De même, suivant Verschaffelt [5], nous avons recherché, pour la différence des densités, une représentation empirique de la forme

$$n_L-n_V=A\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^p. \qquad (2)$$

Cette formule apparaît comme valable seulement dans un beaucoup plus petit domaine de température que la précédente. A tel point que pour l'anhydride carbonique, une incertitude de 0,05° sur la température critique entraînerait une incertitude d'environ 20 pour 100 sur la valeur de p, ce qui suffit à expliquer le désaccord de Verschaffelt et Goldhammer [6] sur la question.

Dans les cas où la température critique semble connue avec le maximum de sécurité (krypton, benzène, oxyde de carbone, éther méthylique), la pente y des courbes logarithmiques de n_L-n_V en fonction de $1-\frac{T}{T_c}$ varie de moins en moins vite à l'approche du point critique. Dans les autres cas, on parvient à choisir justement T_c, de manière à satisfaire à cette condition : c'est au moins vraisemblablement la température critique de l'échantillon soumis à l'expérience.

La croissance de y en fonction de la température à l'approche de la température critique a pu être suivie jusqu'à des valeurs comprises entre 0,34 et 0,40. Une valeur limite de y (et, par suite, une valeur de p) voisine de 0,40 semble très probable pour tous les liquides normaux étudiés, et, plus spécialement, le néon, l'argon, le krypton, le xénon, le mercure, le benzène.

La méthode conduit d'ailleurs à une valeur de la température critique compatible avec la valeur obtenue à partir de la tension superficielle, mais souvent un peu supérieure à la valeur généralement admise. Ceci est conforme aux vues de Naldrett et Maas.

L'élimination de la température entre les expressions (1) et (2) montre que $\frac{\sigma}{(n_L - n_V)^{\frac{p}{m}}}$ tend vers une limite finie à la température critique. Et pour chacun des liquides normaux étudiés, la valeur de $\frac{m}{p}$ obtenue à 10 ou 20 pour 100 près, cadre avec la valeur théorique qui est 3.

Dans quelques cas, le même auteur a mesuré à la fois tension superficielle et densités; le rapport décroît quand la température s'élève, mais semble bien tendre vers une limite finie à la température critique.

Ainsi le champ d'application de la loi de Mac Leod [7] se trouve relégué à des températures bien inférieures à la température critique.

En attendant des mesures soignées de densité et de tension superficielle pour les gaz rares au voisinage immédiat de la température critique, la présente étude cadre avec le résultat de la théorie cinétique, avec une certaine incertitude laissée par la précision souvent insuffisante de difficiles mesures.

[1] Yvon J. — Le problème de la condensation, de la tension superficielle et du point critique, *Colloque de Thermodynamique*, Bruxelles, 1948.
[2] Naldrett S. N. et Maas. — *Canadian J. Research*, 1940, **18** A, 118-121.
[3] Ferguson A. — *Phil. Mag.*, 1916, **31**, 37.
[4] Sugden S. — *J. Chem. Soc.*, 1924, **125**, 32.
[5] Verschaffelt J. E. — *Comm. Leiden*, 1896, n° **28**.
[6] Goldhammer A. — *Z. Phys. Chem.*, 1910, **71**, 577.
[7] Mac Leod D. B. — *Trans. Faraday Soc.*, 1923, **19**, 38.

Manuscrit reçu le 25 juillet 1951.

SPECTRE DE DIFFUSION DE L'ION SiF_6

Par Mme L. Couture-Mathieu et J.-P. Mathieu,
Laboratoire des Recherches physiques, Sorbonne.

On ne connaissait qu'une fréquence du spectre de vibration de l'ion SiF_6, $\Delta\nu = 646\ cm^{-1}$, trouvée dans le spectre Raman des solutions d'acide fluosilicique SiF_6H_2 [1]. Nous avons pu obtenir le spectre de diffusion complet de cet ion, en l'étudiant sur des monocristaux de fluosilicates :

$(SiF_6)(NH_4)_2$, variété cubique :

$$\Delta\nu = 403(F), \quad 466(E), \quad 646(A);$$

$(SiF_6)(NH_4)_2$, variété hexagonale :

$$\Delta\nu = 400, \quad 459, \quad 653;$$

$(SiF_6)[Zn(OH_2)_6]$, rhomboédrique :

$$\Delta\nu = 400 \text{ env.}, \quad 460, \quad 659.$$

On trouve bien trois raies, comme on le prévoit en admettant que l'ion a la forme d'un octaèdre régulier. Les variations de la symétrie du champ cristallin ne produisent pas d'abaissement de symétrie appréciable dans la structure de l'ion, car les raies demeurent simples dans le spectre des cristaux qui ne sont pas cubiques. Les lettres F, E, A indiquent, dans la notation de Placzek, le type de la vibration, déduit des mesures de polarisation des raies correspondantes [2]. Les constantes de rappel de la théorie des forces de valence, calculées par les formules de Wilson [3] pour le sel cubique, ont pour valeurs

$$k_{01} = 3,14.10^5 \text{ dynes : cm}, \quad p = 0,39.10^5,$$
$$k_{\varphi} = 0,44.10^5.$$

La relation

$$\nu_A^2 = \nu_E^2 + \frac{3}{2}\nu_F^2$$

est vérifiée à 10 pour 100 près [4]. L'ensemble du spectre de diffusion est faible, en relation avec la faible polarisabilité de l'ion SiF_6, qui se manifeste d'ailleurs par la faible réfringence de ses sels.

[1] Syrkin et Wolkenstein. — *Acta Physicochemica U.R.S.S.*, 1935, **2**, 303.
[2] Couture et Mathieu. — *Ann. de Phys.*, 1948, **3**, 521.
[3] Yost, Steffens et Gross. — *J. Chem. Physics*, 1934, **2**, 313.
[4] Redlich, Kurz et Rosenfeld. — *Z. phys. Chem.*, 1932, B **19**, 231.

Manuscrit reçu le 27 juillet 1951.

PRÉPARATION DE SOURCES INTENSES ET CONCENTRÉES DE ^{32}P

Par J. Lafoucrière,
Institut de Physique atomique de Lyon.

L'étude du spectre de ^{32}P par la méthode de la trochoïde pose le problème de l'obtention de la substance sous un très faible volume, de façon à réaliser une préparation se rapprochant le plus possible d'une source ponctuelle.

La solution adoptée à l'Institut de Physique atomique consiste à introduire le radioélément sous forme solide dans une aiguille de verre à paroi mince, identique aux aiguilles de radon servant aux études similaires.

Le composé doit être obtenu rapidement et avec le moins de manipulations possible, de façon à éviter les pertes d'activité soit accidentelle, soit normale au cours du temps; il doit être exempt d'éléments lourds pour diminuer l'absorption du rayonnement. Toutes ces raisons nous ont amené à utiliser le phosphate ammoniaco-magnésien très facile à obtenir, à séparer et à sécher.

Le radiophosphore étant livré sans entraîneur sous forme d'acide phosphorique stabilisé à pH 3, on ajoute une goutte d'une solution inactive très étendue. On précipite le phosphate ammoniaco-magnésien et l'on soumet le précipité à des centrifugations suivies de lavages, la dernière centrifugation ayant lieu dans l'aiguille elle-même afin d'y introduire la substance. Les eaux mères étant concentrées, on recommence le traitement, en suivant les phases de l'opération au compteur de Geiger-Müller.

Quatre ou cinq précipitations suffisent pour recueillir toute l'activité, on sèche alors par chauffage doux à l'aide d'une résistance électrique et l'on scelle sous vide.

Cette méthode se prête à la préparation de n'importe quel radioélément sans limitation d'intensité.

Manuscrit reçu le 25 uillet 1951.

SPECTRE RAMAN D'UN MONOCRISTAL DE $PO_4H_2Na, 2H_2O$

Par A. GALY.

Ce cristal dérive du groupe fini D_2; seuls les paramètres relatifs de la maille sont connus ($a : b : c$ = 0,9147 : 1 : 1,5687). Il fournit un spectre Raman extrêmement riche, que nous avons étudié en lumière polarisée (lumière incidente naturelle). Les raies sont généralement larges, et les phénomènes de couplage ne semblent pas en être la seule cause.

Le tableau ci-dessous indique les fréquences observées, leurs intensités [1], leurs types dans la notation de Placzek, lorsqu'elles sont représentables par un tenseur.

Fréquences (en cm^{-1})...	58	71	85-94	110-115	125	143-150	160	183	222	230	250
Intensité	f	m	m	m	m	m	m	f	m	f	f
Type	A_1	A_1	?	?	A_1	?	?	?	A_1 ?	?	?

Fréquences (en cm^{-1})...	315	376	388-394	415	458	485	505	518	526
Intensité	f	m	F	F	F	FF	ff	f	F
Type	?	B_3	?	B_3 ?	$B_1+B_2+B_3$	A_1	–	–	?

Fréquences (en cm^{-1})...	537	547	612	913	948	993	1023	1096	1133	1225	1282
Intensité	F	F	m	FF	F	F	f	f	m	f	f
Type	?	?	A_1	A_1	A_1 ?	A_1	?	B_1	A_1	A_1 ?	–

Fréquences (en cm^{-1})...	3265-3322	3401	3456	3580	3647
Intensité	large bande	large F	large F	fine F	ff
Type	avec deux maxima	?	?	$A_1+B_1+B_2+B_3$	A_1 ?

On voit donc que la plupart des raies ne sont pas représentables par un tenseur; le pouvoir rotatoire possible n'est sûrement pas la seule cause de cette anomalie car, dans certains cas, les raies prévisibles n'apparaissent ni en i, ni en I.

Nous indiquons, ci-dessous, sans tenir compte des anomalies de polarisation, un tableau de filiation possible entre les raies intenses observées dues à l'ion $PO_4H_2^-$ et celles de l'ion PO_4^{---} à symétrie tétraédrique. (Les fréquences écrites sur une même ligne peuvent être attribuées à un couplage.)

Fréquences de l'ion PO_4 à symétrie tétraédrique.	Fréquences observées en solution.	Fréquences fournies par le cristal.
419 E	Bande de	388 à 394
	366 à 381	415
560 F_2	515	458
	?	485
	?	526-537-547
936 A	883	913
1050 F_2	947	948
	1050	993
	1082	1133

Les anomalies rencontrées rendent difficile l'interprétation des grandes fréquences, but que nous nous étions proposé. Par analogie avec les intensités des raies des fréquences OH rencontrées dans le phosphate d'ammonium, il est vraisemblable qu'on puisse leur attribuer la large bande 3265-3322. Le reste serait dû aux molécules d'eau d'hydratation.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1951.

LA MÉTHODE DES POUDRES POUR L'OBTENTION DES SPECTRES D'ABSORPTION INFRAROUGES : SES POSSIBILITÉS ET SES DIFFICULTÉS

Par J. LECOMTE,
Laboratoire des Recherches physiques, Sorbonne.

Avec une mince couche pulvérulente, déposée sur un support convenable ou maintenue entre deux lamelles, *on a pu, depuis une dizaine d'années, étendre avec une grande facilité l'étude des spectres d'absorption infrarouges à de très nombreux composés organiques ou minéraux* (environ un millier pour la Sorbonne seule), pour lesquels : ou bien on ne possédait pas de monocristaux assez gros, ou bien les rares solvants utilisables dans l'infrarouge ne produisaient aucun effet, ou bien les points de fusion étaient trop élevés pour des déterminations commodes, ou bien la préparation d'une mince couche solide par fusion (ou par évaporation) provoquait une modification de structure. Comme on le sait, avec des quantités de substance de l'ordre du milligramme (ou bien inférieures si l'on

[1] F, fort; m, moyen; f, faible.

dispose d'un microscope à miroirs), la méthode des poudres permet l'examen des substances dans l'état exact où elles se trouvent, en particulier de composés présentant différents degrés d'hydratation, possédant des liaisons fragiles ou des possibilités d'isomérisation.

Des difficultés se rencontrent avec des substances hygroscopiques ou avec des matériaux très durs et même, dans des cas heureusement assez rares, il n'est pas possible de réaliser une couche correcte. Ainsi, en collaboration avec C. Duval, nous avons étudié facilement à l'état de poudre le sulfate de cuivre anhydre, ou bien hydraté avec 1 ou 5 mol d'eau, mais il a été impossible d'obtenir des bandes avec l'hydrate à 3 mol d'eau.

L'affaiblissement des radiations incidentes dépend, non seulement de l'absorption propre des substances, mais aussi de la diffusion à travers la couche pulvérulente, qu'il est difficile de chiffrer, malgré une ingénieuse méthode [1]. On la réduit seulement, ainsi qu'on le sait, en humectant la poudre avec des liquides bien choisis : nujol, perfluorokérosène, hexachlorobutadiène, etc. Aussi, comme divers auteurs l'ont indiqué, et comme nous l'avons constaté personnellement, *la forme des courbes de transmission d'une substance à l'état de poudre diffère généralement profondément de ce que l'on obtient pour le même matériau sous forme massive* : elle dépend de la grosseur des grains, de leur hygroscopicité, de leur tendance à s'agglomérer, de l'homogénéité de leurs dimensions, de l'épaisseur de la couche, et aussi de sa préparation. Ce dernier point nous semble avoir été souvent négligé. On a signalé qu'une couche noire, formée de fines particules, pouvait devenir brillante sous l'effet d'une compression. Lorsque l'indice de réfraction de la substance étudiée devient égal à 1 (ce qui arrive fréquemment à cause de la dispersion anormale dans l'infrarouge), par suite de la suppression de la réfraction, on observe une augmentation brusque de la transmission pour une couche pulvérulente baignant dans l'air [2]. On évite d'ailleurs, en grande partie, ce phénomène en choisissant des couches minces et des poudres à grains fins. Nous ne considérerons pas ici le curieux effet de mosaïque [3].

Généralement, on s'attache surtout à déterminer *la position des maxima d'absorption*. Autant qu'on puisse le dire avec des bandes larges, telles qu'elles se présentent le plus souvent pour les vibrations fondamentales, à condition d'opérer correctement, la méthode des poudres conduit à une précision du même ordre que le recours à des lamelles cristallines. Il n'est nullement exclu, suivant une intéressante Communication [4] que, dans la détermination, au moyen de cette technique, des fréquences propres d'absorption (qui sont, on le sait, différentes de celles des rayons restants), l'existence d'un pouvoir réflecteur, élevé et variable avec la longueur d'onde, produise un déplacement apparent du maximum d'absorption vers la position des rayons restants. Dans l'exemple choisi avec le sel gemme ([3], *fig.* 9), il nous semble cependant que ce déplacement de 61,1 à 60 μ, suivant qu'il s'agit d'une couche très mince ou d'une couche à grain apparent (et probablement notablement plus épaisse), puisse aussi s'interpréter par de légères incertitudes dans le tracé de la courbe, dues à la difficulté des mesures, ou encore par l'influence d'un maximum d'absorption à 51,2 μ, qui n'est plus visible dans le cas de surfaces à gros grain. D'ailleurs, comme il s'agit de couches encore assez minces (de l'ordre de quelques microns au plus), la dimension des grains doit rester faible par rapport à la longueur d'onde, dans le cas indiqué, et l'effet prévu par M. J.-P. Mathieu, bien que ne pouvant être chiffré, nous paraît devoir rester assez faible. Pour obtenir une séparation des deux effets d'absorption (réelle et apparente), au moins théoriquement, on pourrait recourir au spectre d'émission de la couche pulvérulente chauffée. Suivant la loi de Kirchhoff, un maximum ou un minimum d'émission correspondent à un maximum ou à un minimum d'absorption vraie. Ainsi, dans la région des rayons restants du quartz (8-10 μ), Pfund [6] a montré la présence, dans le cas de la poudre fine chauffée, d'un *maximum* d'émission, alors qu'une plaque de quartz cristalline donnait lieu à un *minimum* d'émission.

Dans l'ensemble, *la méthode des poudres, malgré certaines lacunes, fournit des renseignements précieux sur l'absorption infrarouge et les fréquences propres des substances, mais leur valeur et leur possibilité d'utilisation, en vue d'études théoriques, peut dépendre dans une large mesure des conditions d'application*. Les meilleurs résultats s'obtiennent généralement avec des couches bien homogènes, d'une épaisseur juste suffisante pour bien marquer les maxima d'absorption, et constituées de grains très fins de grosseur assez uniforme.

[1] Pirlot G. — *Bull. Soc. Chim. Belgique*, 1950, **59**, 227.
[2] Barnes R. B. et Bonner L. G. — *Phys. Rev.*, 1936, **49**, 732; Price W. C. — *J. Chem. Phys.*, 1948, **16**, 1157; Henry R. L. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1948, **38**, 775-789.
[3] Pfund A. H. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1939, **29**, 10.
[4] Mathieu J.-P. — *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 632.
[5] Czerny M. et Barnes R. B. — *Z. Physik*, 1931, **72**, 447.
[6] Pfund A. H. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1933, **23**, 270.

Manuscrit reçu le 27 juillet 1951.

Le Gérant : Maurice Blondin. 140717 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1951.